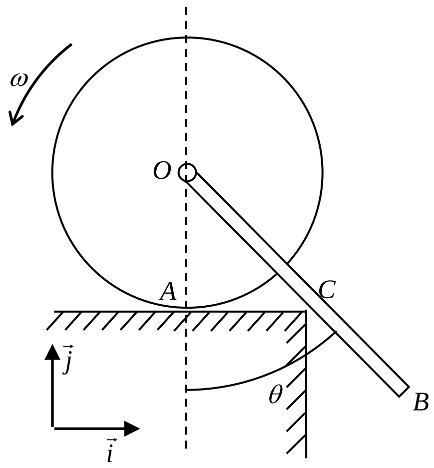
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA 1 – Segunda Prova – 17 de outubro de 2017 – Duração: 110 minutos
(não é permitido uso de celulares, *tablets*, calculadoras e dispositivos similares)



1ª Questão (3,5 pontos). No mecanismo da figura, o disco rígido de centro O e raio R rola sem escorregar com velocidade angular constante ω sobre uma superfície horizontal fixa. Articulada ao centro O do disco há uma barra rígida OB, de comprimento L, que desliza sobre uma quina, conforme ilustrado na figura. No instante considerado, a barra OB forma um ângulo θ com a vertical e o contato quina-barra se dá no ponto C da barra. Para esse instante, pede-se:

(a) calcular a velocidade $\vec{v}_O$ e a aceleração $\vec{a}_O$ do ponto O;

(b) determinar graficamente a posição do centro instantâneo de rotação da barra OB;

(c) determinar a velocidade angular ω_{OB} da barra OB;

(d) determinar a velocidade $\vec{v}_B$ do ponto B.

RESOLUÇÃO

(a) Como o disco rola sem escorregar, o seu centro instantâneo de rotação coincide com o ponto A. Portanto, a velocidade de O é determinada a partir de:

$$\vec{v}_O = \vec{v}_A + \omega\vec{k} \wedge (O - A) = \vec{0} + \omega\vec{k} \wedge R\vec{j} = -\omega R\vec{i} \qquad (0,5)$$

De acordo com o enunciado do problema, ω é constante. Concluímos, portanto, que

(1) a aceleração angular do disco é nula: $\dot{\omega} = 0$

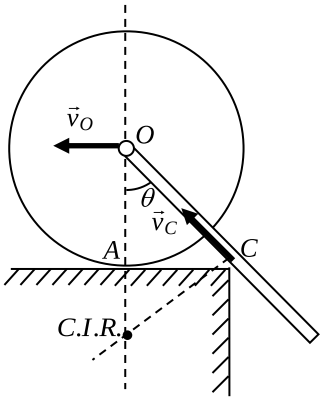
(2) o centro do disco realiza movimento retilíneo uniforme: $\vec{a}_O = \vec{0}$ (0,5)

A aceleração do ponto A é obtida a partir de:

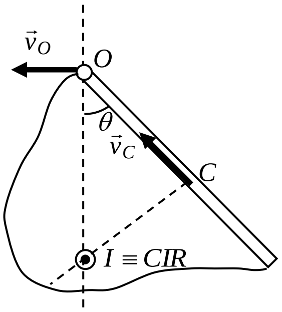
$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \dot{\omega}\vec{k} \wedge (A - O) + \omega\vec{k} \wedge \left[\omega\vec{k} \wedge (A - O)\right] = \vec{0} + \omega\vec{k} \wedge \left[\omega\vec{k} \wedge (-R\vec{j})\right] = \omega^2 R\vec{j}$$

(b)

As direções das velocidades dos pontos O e C da barra são conhecidas. Portanto, o CIR da barra pode ser determinado graficamente conforme ilustrado na figura ao lado. (1,0)



(c) Considerando-se o ponto O da barra e um ponto I pertencente à sua extensão material e coincidente com o seu CIR, determina-se a velocidade angular da barra aplicando-se a equação do campo de velocidade:



• I: ponto pertencente à extensão material da barra

○ CIR: ponto geométrico

$\vec{v}_O = -\omega R\vec{i} = \vec{v}_{I\equiv CIR} + \omega_{OB}\vec{k} \wedge (O-I) = \vec{0} + \omega_{OB}\vec{k} \wedge \dfrac{|C-O|}{\cos\theta}\vec{j} = -\omega_{OB}\dfrac{R}{\cos^2\theta}\vec{i}$, com I pertencente à extensão material (rígida) da barra. Assim,

$$\omega_{OB} = \omega\cos^2\theta \qquad (1,0)$$

(c) A velocidade de B, portanto, é:

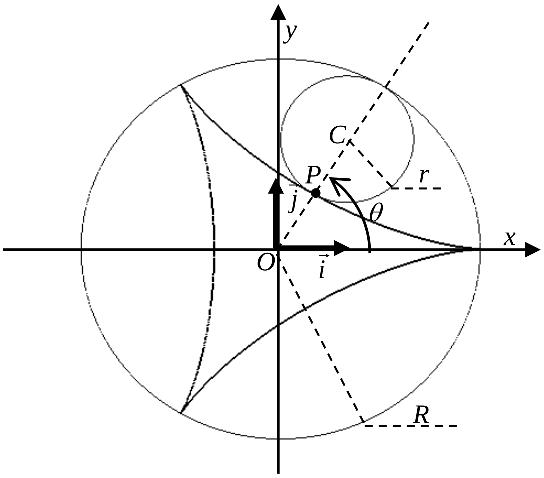
$$\vec{v}_B = \vec{v}_O + \omega_{OB}\vec{k} \wedge (B-O) = -\omega R\vec{i} + \omega\cos^2\theta\vec{k} \wedge L\left(\sin\theta\vec{i} - \cos\theta\vec{j}\right) =$$
$$= -\omega\left(R + L\cos^3\theta\right)\vec{i} + \omega L\sin\theta\cos^2\theta\vec{j}$$

(0,5)

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA 1 – Segunda Prova – 17 de outubro de 2017 – Duração: 110 minutos
(não é permitido uso de celulares, *tablets*, calculadoras e dispositivos similares)



2ª Questão (3,0 pontos). Na figura ao lado, o disco de centro C e raio r realiza movimento de rolamento sem deslizamento sobre a pista interna de um aro fixo de raio $R = 3r$. A curva desenhada em linha mais espessa, chamada *hipociclóide*, representa a trajetória de um ponto material P da periferia do disco móvel. Essa curva é descrita, na forma paramétrica, pelas equações:

$$x = (R-r)\cos\theta + r\cos\left(\frac{R-r}{r}\theta\right)$$

$$y = (R-r)\sin\theta - r\sin\left(\frac{R-r}{r}\theta\right)$$

Admitindo-se que a lei horária do parâmetro angular θ seja $\theta(t) = \omega t$, com $\omega = \frac{\pi}{30}\,\text{rad/s}$, pede-se:

(a) determinar as expressões cartesianas da velocidade e da aceleração de P descritas na base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$;
(b) determinar a velocidade e a aceleração de P nos instantes $t = 0$ e $t = 20s$;
(c) determinar as expressões intrínsecas da velocidade e da aceleração de P no instante $t = 15s$;
(d) indicar, apresentando as devidas justificativas, se, nos instantes $t = 0$ e $t = 20s$, é possível expressar a aceleração de P utilizando coordenadas intrínsecas.

RESOLUÇÃO

(a) Como $R = 3r$, a trajetória de P é representada pela seguinte equação vetorial:

$$(P-O) = [2r\cos\theta + r\cos(2\theta)]\vec{i} + [2r\sin\theta - r\sin(2\theta)]\vec{j} \qquad \text{(Eq.1)}$$

Derivando-se a expressão acima, resulta:

$$\vec{v} = [-2r\sin\theta\dot{\theta} - 2r\sin(2\theta)\dot{\theta}]\vec{i} + [2r\cos\theta\dot{\theta} - 2r\cos(2\theta)\dot{\theta}]\vec{j} \qquad \text{(Eq.2)}$$

Mas $\dot{\theta} = \omega = \frac{\pi}{30}\,\text{rad/s}$.

Logo, a velocidade de P se expressa como

$$\vec{v} = -2\omega r[\sin\theta + \sin(2\theta)]\vec{i} + 2\omega r[\cos\theta - \cos(2\theta)]\vec{j}.$$

$$\Rightarrow \vec{v} = -\frac{\pi}{15} r[\sin\theta + \sin(2\theta)]\vec{i} + \frac{\pi}{15} r[\cos\theta - \cos(2\theta)]\vec{j} \qquad \text{(Eq.3)}$$

(0,5)

Derivando-se a expressão acima, obtém-se a aceleração de P, ou seja,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\omega r\left[\cos\theta\dot{\theta} + 2\cos(2\theta)\dot{\theta}\right]\vec{i} + 2\omega r\left[-\sin\theta\dot{\theta} + 2\sin(2\theta)\dot{\theta}\right]\vec{j}\ .$$

Feito o devido desenvolvimento algébrico, resulta:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -2\omega^2 r[\cos\theta + 2\cos(2\theta)]\vec{i} + 2\omega^2 r[-\sin\theta + 2\sin(2\theta)]\vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = -2\left(\frac{\pi}{30}\right)^2 r[\cos\theta + 2\cos(2\theta)]\vec{i} + 2\left(\frac{\pi}{30}\right)^2 r[-\sin\theta + 2\sin(2\theta)]\vec{j} \qquad \text{(Eq.4)}$$

(0,5)

(b) Nos instantes $t = 0$ e $t = 20s$ P coincide com o *CIR* do disco móvel; logo, a velocidade de P se anula nesses instantes.

No primeiro caso, $\theta = 0$ e

$$\vec{v}(t=0) = -2\omega r[\sin 0 + \sin(0)]\vec{i} + 2\omega r[\cos 0 - \cos(0)]\vec{j} = \vec{0}\,.$$

No segundo caso, $\theta = \frac{2\pi}{3}$ e

$$\vec{v}(t=20) = -2\omega r\left[\sin\frac{2\pi}{3} + \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right]\vec{i} + 2\omega r\left[\cos\frac{2\pi}{3} - \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right]\vec{j} = \vec{0} \quad .$$

(0,5)

Nos instante $t = 0$ e $t = 20s$ a aceleração de P é, respectivamente:

$$\vec{a}(0) = -2\omega^2 r[\cos 0 + 2\cos(0)]\vec{i} + 2\omega^2 r[-\sin 0 + 2\sin 0] = -6\omega^2 r\vec{i} = -6\left(\frac{\pi}{30}\right)^2 r\vec{i}$$

e

$$\vec{a}(t=20) = -2\omega^2 r\left[\cos\frac{2\pi}{3} + 2\cos\frac{4\pi}{3}\right]\vec{i} + 2\omega^2 r\left[-\sin\frac{2\pi}{3} + 2\sin\frac{4\pi}{3}\right]\vec{j} =$$

$$= 3\omega^2 r\vec{i} - 3\sqrt{3}\omega^2 r\vec{j} = 3\left(\frac{\pi}{30}\right)^2 r\left(\vec{i} - \sqrt{3}\vec{j}\right)$$

(0,5)

(c) Da Eq.3, obtém-se o módulo da velocidade de P, ou seja:

$$|\vec{v}| = \sqrt{4\omega^2 r^2\left[\sin\theta + \sin(2\theta)\right]^2 + 4\omega^2 r^2\left[\cos\theta - \cos(2\theta)\right]^2} = 2\omega r\sqrt{2 + 2\cos\theta\left(4\sin^2\theta - 1\right)}$$

No instante $t = 15s$, $\theta = \frac{\pi}{30}\cdot 15 = \frac{\pi}{2}$, de modo que, nesse instante a expressão intrínseca da velocidade de P adquire a forma

$$\vec{v}(t=15) = 2\omega r\sqrt{2 + 2\cos\frac{\pi}{2}\left(4\sin^2\frac{\pi}{2} - 1\right)}\,\vec{\tau}(\theta(t=15)) = 2\omega r\sqrt{2}\vec{\tau}(\theta(t=15)) = \frac{\pi}{15}\sqrt{2}r\,\vec{\tau}(\theta(t=15))$$

em que o versor tangente local

$$\vec{\tau}(\theta) = \frac{d\vec{P}/d\theta}{\left|d\vec{P}/d\theta\right|} = \frac{-2r(\sin\theta + \sin 2\theta)\vec{i} + 2r(\cos\theta - \cos 2\theta)\vec{j}}{\sqrt{4r^2(\sin\theta + \sin 2\theta)^2 + 4r^2(\cos\theta - \cos 2\theta)^2}} = \frac{-(\sin\theta + \sin 2\theta)\vec{i} + (\cos\theta - \cos 2\theta)\vec{j}}{\sqrt{2 + 2\cos\theta\left(4\sin^2\theta - 1\right)}}$$

para $\theta = \frac{\pi}{2}$, é dado por:

$$\vec{\tau}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-\left(\sin\frac{\pi}{2} + \sin\pi\right)\vec{i} + \left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos\pi\right)\vec{j}}{\sqrt{2 + 2\cos\frac{\pi}{2}\left(4\sin^2\frac{\pi}{2} - 1\right)}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$$

Como o versor normal principal aponta para o centro de curvatura local da trajetória, concluímos da figura que, para $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\vec{b} = -\vec{k}$,

de modo que: $$\vec{n}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \vec{b}\left(\frac{\pi}{2}\right)\wedge\vec{\tau}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\vec{k}\wedge\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}$$

Na forma cartesiana, a aceleração de P no instante $t = 15s$ se expressa como:

$$\vec{a}(t=15) = -2\left(\frac{\pi}{30}\right)^2 r\left[\cos\frac{\pi}{2} + 2\cos\pi\right]\vec{i} + 2\left(\frac{\pi}{30}\right)^2 r\left[-\sin\frac{\pi}{2} + 2\sin\pi\right]\vec{j} = 4\left(\frac{\pi}{30}\right)^2 r\vec{i} - 2\left(\frac{\pi}{30}\right)^2 r\vec{j}$$

Projetando-se a expressão acima nas direções dos versores tangente e normal à trajetória no instante $t = 15s$, obtém-se, respectivamente, os valores das componentes tangencial e normal da aceleração nesse instante, ou seja:

$$a_\tau(t=15)=\left[4\left(\frac{\pi}{30}\right)^2 r\vec{i}-2\left(\frac{\pi}{30}\right)^2 r\vec{j}\right]\cdot\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right]=-2\left(\frac{\pi}{30}\right)^2\sqrt{2}r-\left(\frac{\pi}{30}\right)^2\sqrt{2}r=-3\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{30}\right)^2 r$$

e

$$a_n(t=15)=\left[4\left(\frac{\pi}{30}\right)^2 r\vec{i}-2\left(\frac{\pi}{30}\right)^2 r\vec{j}\right]\cdot\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right]=2\left(\frac{\pi}{30}\right)^2\sqrt{2}r-\left(\frac{\pi}{30}\right)^2\sqrt{2}r=\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{30}\right)^2 r$$

Assim, em $t=15s$, a aceleração de P na forma intrínseca é dada por:

$$\vec{a}(t=15)=-3\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{30}\right)^2 r\,\vec{\tau}\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{30}\right)^2 r\,\vec{n}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$ (0,5)

(d) Notemos que, para $\theta=k\frac{2\pi}{3},\ com\ k\in N$, os versores e $\vec{n}$ da base móvel de Frenet não são definidos. O versor tangente, por exemplo, é dado por

$$\vec{\tau}(\theta(t))=\frac{\vec{v}(\theta(t))}{|\vec{v}(\theta(t))|}$$

Entretanto, para $\theta=k\frac{2\pi}{3},\ com\ k\in N$, $\vec{v}(\theta(t))=\vec{0}$.

Assim, a expressão vetorial anterior fica indefinida.

O mesmo irá ocorrer com o versor normal $\vec{n}$. No entorno de cada um dos pontos de reversão da hipociclóide (cúspides da curva), P descreve um dos ramos da trajetória com velocidade decrescente, outro com velocidade crescente. Nesses pontos, a curva é contínua, mas não diferenciável, e, considerando a primeira fórmula de Frenet, ou seja,

$$\frac{d\vec{\tau}(\theta(t))}{ds}=\frac{\vec{n}(\theta(t))}{R(\theta(t))}$$

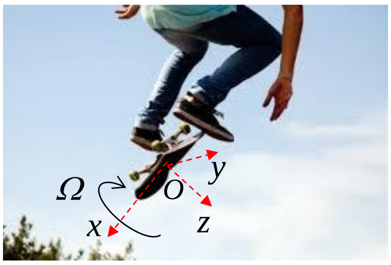
concluímos que $\vec{n}(\theta(t))$ não é definido nos instantes em que o ponto P do disco móvel incide sobre a pista interna do aro fixo.

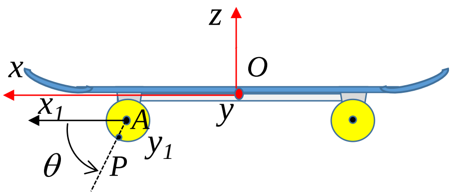
Uma vez que, para os valores de θ correspondentes às cúspides da hipociclóide, não se pode definir nem o versor tangente, nem o versor normal principal, concluirmos não ser possível representar a aceleração de P na forma intrínseca nos instantes em que P se situar sobre uma cúspide de sua trajetória. (0,5)

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA 1 – Segunda Prova – 17 de outubro de 2017 – Duração: 110 minutos
(não é permitido uso de celulares, *tablets*, calculadoras e dispositivos similares)





3ª Questão (3,5 pontos). No *skate* da foto, admite-se, por simplicidade, que o *truck* (estrutura metálica de suporte, onde as rodas são montadas) não tenha liberdade de movimento com respeito à prancha, de sorte que prancha (*board*) e *truck* possam ser considerados um único corpo rígido. Este conjunto rígido apresenta ato de movimento de rotação pura, em torno do eixo *Ox*. A intensidade desta rotação, $\Omega(t) > 0$, e sua derivada no tempo, $\dot{\Omega}(t)$, são conhecidas. Os eixos *Oxyz*, orientados pela base canônica $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, são solidários à prancha, suposta rígida. A figura esquemática mostra os eixos e demais definições. Neste instante, a roda de raio externo *R* e eixo Ay_1, paralelo a *Oy*, gira relativamente ao *truck* com velocidade angular $\dot{\theta} > 0$, *suposta constante*. É conhecido o vetor de posição relativa $(A - O) = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$; *a*,*b*>0; *c*<0. Considere um ponto *P*, conforme indica a figura, no plano da face externa da roda e que contém o ponto *A*, tal que $(P - A) = R\cos\theta\vec{i} - R\sin\theta\vec{k}$. Sabe-se também que, no instante considerado, a velocidade do ponto *O* é nula ($\vec{v}_O = \vec{0}$) e sua aceleração é $\vec{a}_O = g(\cos\alpha\vec{i} + \sin\alpha\vec{k})$, onde *g* é a aceleração da gravidade e α é o ângulo que o eixo *Ox* faz com a vertical. Ou seja, o eixo *Oy* se encontra na posição horizontal e o ponto *O* está no ápice de sua trajetória. *Neste instante*, considerando prancha + *truck* como o referencial móvel, expressando os resultados na base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ que orienta o sistema cartesiano a ele solidário e medindo-se o campo cinemático com respeito à Terra, pede -se:

(a) Escreva o vetor de rotação de arrastamento, $\vec{\omega}_a$, do referencial móvel; e, *da roda*, os vetores de rotação relativa, $\vec{\omega}_r$, e absoluta, $\vec{\omega}$.

(b) Determine o vetor velocidade do ponto *P*, $\vec{v}_P$, indicando as correspondentes parcelas de arrastamento, $\vec{v}_a$, e relativa, $\vec{v}_r$.

(c) Determine o vetor aceleração do ponto *P*, $\vec{a}_P$, indicando as correspondentes parcelas de arrastamento, $\vec{a}_a$, relativa, $\vec{a}_r$ e de Coriolis, $\vec{a}_C$.

(d) Identifique o eixo helicoidal instantâneo do conjunto rígido prancha + *truck*. Justifique sua resposta.

RESOLUÇÃO

(a) <u>Sabe-se que</u> o ato de movimento do conjunto rígido prancha + *truck* é de rotação pura, de intensidade Ω. O vetor de rotação de arrastamento, $\vec{\omega}_a$, do referencial móvel é, portanto, $\vec{\omega}_a = \Omega\vec{i}$. Por sua vez, o vetor de rotação relativa da roda, com respeito ao referencial móvel, é $\vec{\omega}_r = \dot{\theta}\,\vec{j}$. Assim, o vetor de rotação absoluta da roda é, então, $\vec{\omega} = \vec{\omega}_a + \vec{\omega}_r = \Omega\vec{i} + \dot{\theta}\,\vec{j}$.

(0,5)

(b) O vetor velocidade do ponto *P* pode ser escrito como a composição (soma) das parcelas de arrastamento, $\vec{v}_a$, e relativa, $\vec{v}_r$. A primeira pode ser determinada com base no conhecimento da velocidade de um ponto do conjunto rígido prancha + *truck*, por exemplo *O*, e do vetor de rotação de arrastamento naquele instante, $\vec{\omega}_a = \Omega\vec{i}$. Considerando-se P como ponto pertencente à 'extensão rígida' do conjunto, segue que:

$$\begin{aligned}\vec{v}_{Pa} &= \vec{v}_O + \vec{\omega}_a \wedge (P-O) = \\ &= \vec{v}_O + \Omega\vec{i} \wedge \left[(P-A)+(A-O)\right] = \\ &= \vec{v}_O + \Omega\vec{i} \wedge \left[(R\cos\theta + a)\vec{i} + b\vec{j} + (c - R\sin\theta)\vec{k}\right] = \\ &= \vec{v}_O + \Omega(R\sin\theta - c)\vec{j} + \Omega b\vec{k}\end{aligned} \qquad (0{,}5)$$

A velocidade relativa de *P* é aquela vista do referencial móvel, isto é.

$$\begin{aligned}\vec{v}_{Pr} &= \left[\frac{d}{dt}(P-O)\right]_{móvel} = \left[\frac{d}{dt}\big((P-A)+(A-O)\big)\right]_{móvel} = \left[\frac{d}{dt}(P-A)\right]_{móvel} = \\ &= \vec{\omega}_r \wedge (P-A) = \dot{\theta}\,\vec{j} \wedge R(\cos\theta\vec{i} - \sin\theta\vec{k}) = -\dot{\theta}R(\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{k})\end{aligned} \qquad (0{,}5)$$

Assim, a velocidade 'absoluta' de *P* será:

$$\begin{aligned}\vec{v}_P &= \vec{v}_{Pa} + \vec{v}_{Pr} = \vec{v}_O + \Omega(R\sin\theta - c)\vec{j} + \Omega b\vec{k} - \dot{\theta}R(\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{k}) = \\ &= \vec{v}_O - \dot{\theta}R\sin\theta\vec{i} + \Omega(R\sin\theta - c)\vec{j} + (\Omega b - \dot{\theta}R\cos\theta)\vec{k}\end{aligned} \qquad (*)$$

Como no instante considerado a velocidade de *O* é nula, vem:

$$\vec{v}_P = -\dot{\theta}R\sin\theta\vec{i} + \Omega(R\sin\theta - c)\vec{j} + (\Omega b - \dot{\theta}R\cos\theta)\vec{k} \qquad (**)$$

Note que a velocidade 'absoluta' de P poderia ser calculada alternativamente de:

$$\begin{aligned}\vec{v}_P &= \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (P-A) = \vec{v}_O + \vec{\omega}_a \wedge (A-O) + \vec{\omega} \wedge (P-A) = \\ &= \vec{v}_O + \Omega\vec{i} \wedge (A-O) + (\Omega\vec{i} + \dot{\theta}\vec{j}) \wedge (P-A) = \\ &= \vec{v}_O + \Omega\vec{i} \wedge (a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}) + (\Omega\vec{i} + \dot{\theta}\vec{j}) \wedge R(\cos\theta\vec{i} - \sin\theta\vec{k}) = \quad , \\ &= \vec{v}_O + \left(\Omega b\vec{k} - \Omega c\vec{j}\right) + \Omega R\sin\theta\vec{j} - \dot{\theta}R(\cos\theta\vec{k} + \sin\theta\vec{i}) = \\ &= \vec{v}_O - \dot{\theta}R\sin\theta\vec{i} + \Omega(R\sin\theta - c)\vec{j} + (\Omega b - \dot{\theta}R\cos\theta)\vec{k}\end{aligned}$$

recuperando-se (*). Com $\vec{v}_O = 0$ neste instante, recupera-se o resultado (**) acima.

(c) As parcelas de aceleração de (i) arrastamento, (ii) relativa e (iii) de Coriolis do ponto *P* serão dadas respectivamente por (lembre que $\vec{a}_O = g(\cos\alpha\vec{i} + \sin\alpha\vec{k})$):

PME 3100 – MECÂNICA 1 – Segunda Prova – 17 de outubro de 2017 – Duração: 110 minutos
(não é permitido uso de celulares, *tablets*, calculadoras e dispositivos similares)

(i) Aceleração de arrastamento:

$$\vec{a}_{Pa} = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}}_a \wedge (P-O) + \vec{\omega}_a \wedge (\vec{\omega}_a \wedge (P-O)) =$$
$$= \vec{a}_O + (\dot{\Omega}\vec{i} + \vec{\omega}_a \wedge \vec{\omega}_a) \wedge (P-O) + \vec{\omega}_a \wedge (\vec{v}_{Pa} - \vec{v}_O) =$$
$$= \vec{a}_O + \dot{\Omega}\vec{i} \wedge (P-O) + \Omega\vec{i} \wedge \vec{v}_{Pa} =$$
$$= g(\cos\alpha\vec{i} + \sin\alpha\vec{k}) + \dot{\Omega}\vec{i} \wedge \left((R\cos\theta)\vec{i} + b\vec{j} + (c - R\sin\theta)\vec{k}\right) + \Omega\vec{i} \wedge \left(\Omega(R\sin\theta - c)\vec{j} + \Omega b\vec{k}\right) =$$
$$= g(\cos\alpha\vec{i} + \sin\alpha\vec{k}) + \dot{\Omega}\left(b\vec{k} + (R\sin\theta - c)\vec{j}\right) + \Omega^2\left((R\sin\theta - c)\vec{k} - b\vec{j}\right) =$$
$$= g\cos\alpha\vec{i} + \left(\dot{\Omega}(R\sin\theta - c) - \Omega^2 b\right)\vec{j} + \left(g\sin\alpha + \dot{\Omega}b + \Omega^2(R\sin\theta - c)\right)\vec{k}$$

(0,5)

(ii) Aceleração relativa:

$$\vec{a}_{Pr} = \left[\frac{d^2}{dt^2}(P-O)\right]_{móvel} = \left[\frac{d^2}{dt^2}((P-A)+(A-O))\right]_{móvel} = \left[\frac{d^2}{dt^2}(P-A)\right]_{móvel} =$$
$$= \left(\dot{\vec{\omega}}_r\right)_{móvel} \wedge (P-A) + \vec{\omega}_r \wedge \left(\vec{\omega}_r \wedge (P-A)\right) = \quad , \quad (0,5)$$
$$= \ddot{\theta}\,\vec{j} \wedge (P-A) + \dot{\theta}\,\vec{j} \wedge \vec{v}_{Pr}$$

Usando o fato de que $\dot{\theta}$ é suposto constante, chega-se a:

$$\vec{a}_{Pr} = \dot{\theta}\,\vec{j} \wedge \left(-\dot{\theta}R(\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{k})\right) = -\dot{\theta}^2 R(\cos\theta\vec{i} - \sin\theta\vec{k}),$$

que é uma aceleração centrípeta dirigida de *P* para *A*.

(iii) Aceleração de Coriolis:

$$\vec{a}_{PC} = 2\vec{\omega}_a \wedge \vec{v}_{Pr} = 2\Omega\vec{i} \wedge \left(-\dot{\theta}R(\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{k})\right) = 2\Omega\dot{\theta}R\cos\theta\vec{j}\,. \quad (0,5)$$

A aceleração 'absoluta' de *P* será então:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{Pa} + \vec{a}_{Pr} + \vec{a}_{PC} =$$
$$= g\cos\alpha\vec{i} + \left(\dot{\Omega}(R\sin\theta - c) - \Omega^2 b\right)\vec{j} + \left(g\sin\alpha + \dot{\Omega}b + \Omega^2(R\sin\theta - c)\right)\vec{k} +$$
$$- \dot{\theta}^2 R(\cos\theta\vec{i} - \sin\theta\vec{k}) + 2\Omega\dot{\theta}R\cos\theta\vec{j} = \quad (***)$$
$$= \left[g\cos\alpha - \dot{\theta}^2 R\cos\theta\right]\vec{i} + \left[\dot{\Omega}(R\sin\theta - c) - \Omega^2 b + 2\Omega\dot{\theta}R\cos\theta\right]\vec{j} +$$
$$+ \left[g\sin\alpha + \dot{\Omega}b + \Omega^2(R\sin\theta - c) + \dot{\theta}^2 R\sin\theta\right]\vec{k}$$

Alternativamente, derivando-se diretamente a expressão (*), da velocidade, em relação ao tempo e lembrando que

$$\dot{\vec{i}} = \vec{\omega}_a \wedge \vec{i} = \Omega\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{0};\ \dot{\vec{j}} = \vec{\omega}_a \wedge \vec{j} = \Omega\vec{i} \wedge \vec{j} = \Omega\vec{k};\ \dot{\vec{k}} = \vec{\omega}_a \wedge \vec{k} = \Omega\vec{i} \wedge \vec{k} = -\Omega\vec{j},$$

pode-se facilmente verificar o resultado (***) acima.

(d) No instante considerado, sabe-se que o movimento do conjunto rígido prancha + *truck* é de rotação pura. Assim, seu eixo helicoidal instantâneo é o próprio eixo *Ox*. (0,5)