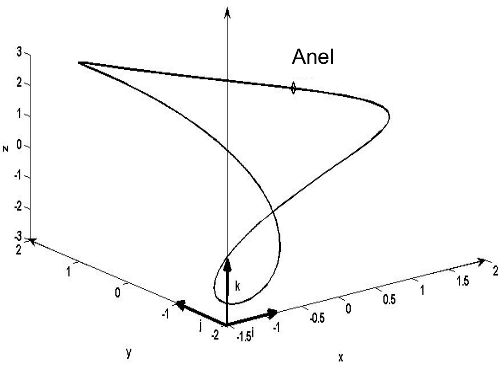
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PME 3100 – MECÂNICA 1 – Segunda Prova – 18 de outubro de 2016 –

Duração da Prova: 110 minutos

(não é permitido portar celulares, tablets, calculadoras e dispositivos similares)



QUESTÃO 1 (2,5 pontos). Conforme ilustrado na figura, um pequeno anel move-se vinculado a um arame curvo descrito pela equação:

$$(P-O)=\vec{r}(u)=(\cos u+\cos 2u)\vec{i}+(\sin u-\sin 2u)\vec{j}+3\sin u\vec{k}$$

em que u é um parâmetro variável no tempo. O movimento do anel obedece à lei horária u(t) = t/10.

Para o instante $t=10\pi$, pede-se:

(a) o versor tangente ao arame no ponto coincidente com o anel, descrito em coordenadas cartesianas (utilize a base $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$).

(b) a velocidade do anel descrita em coordenadas intrínsecas;

(c) a aceleração do anel descrita em coordenadas intrínsecas.

Solução:

a) O versor tangente à curva, em qualquer ponto, é dado por:

$$\vec{\tau}=\frac{\vec{r}\,'}{|\vec{r}\,'|}=\frac{\frac{dr_x}{du}\vec{i}+\frac{dr_y}{du}\vec{j}+\frac{dr_z}{du}\vec{k}}{\sqrt{\left(\frac{dr_x}{du}\right)^2+\left(\frac{dr_y}{du}\right)^2+\left(\frac{dr_z}{du}\right)^2}}$$

As componentes da derivada da função vetorial $\vec{r}(u)$ são dadas por:

$$\frac{dr_x}{du}=-\sin u-2\sin 2u$$

$$\frac{dr_y}{du}=\cos u-2\cos 2u$$

$$\frac{dr_z}{du}=\cos u$$

Para o instante $t=10\pi$, tem-se $u(10\pi)=\pi$ e:

$$\frac{dr_x}{du}(t=10\pi)=-\sin\pi-2\sin 2\pi=0$$

$$\frac{dr_y}{du}(t=10\pi)=\cos\pi-2\cos 2\pi=-3$$

$$\frac{dr_z}{du}(t=10\pi)=3\cos 3\pi=-3$$

$$|\vec{r}\,'(t=10\pi)|=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}$$

Portanto, o versor tangente à curva, no ponto coincidente com a posição do anel no instante $t=10\pi$, é:

$$\vec{\tau}=\frac{1}{3\sqrt{2}}\left(-3\vec{j}-3\vec{k}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}$$

(1,0)

b) A velocidade do anel é dada por:

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d\vec{r}}{du}\frac{du}{dt}=(-\sin u-2\sin 2u)\frac{1}{10}\vec{i}+(\cos u-2\cos 2u)\frac{1}{10}\vec{j}+3\cos u\frac{1}{10}\vec{k}$$

No instante considerado, tem-se:

$$\vec{v}(u(t=10\pi)) = (-\sin\pi - 2\sin 2\pi)\frac{1}{10}\vec{i} + (\cos\pi - 2\cos 2\pi)\frac{1}{10}\vec{j} + 3\cos\pi\frac{1}{10}\vec{k} = -\frac{1}{10}(3\vec{j} + 3\vec{k})$$

A velocidade escalar do anel, nesse instante, é, portanto:

$$v(t=10\pi) = \frac{1}{10}\sqrt{9+9} = \frac{3\sqrt{2}}{10}$$

e a expressão intrínseca de sua velocidade, é:

$$\vec{v}(t=10\pi) = \frac{3\sqrt{2}}{10}\vec{\tau}$$

(0,5)

c) A aceleração do anel, descrita em coordenadas cartesianas, é dada por:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{du}\frac{du}{dt} = \left[(-\cos u - 4\cos 2u)\frac{1}{10}\vec{i} + (-\sin u + 4\sin 2u)\frac{1}{10}\vec{j} - 3\sin u\frac{1}{10}\vec{k}\right]\frac{1}{10}$$

No instante considerado, tem-se:

$$\vec{a}(t=10\pi) = \vec{a}(u=\pi) = (-\cos\pi - 4\cos 2\pi)\frac{1}{100}\vec{i} + (-\sin\pi + 4\sin 2\pi)\frac{1}{100}\vec{j} - 3\sin\pi\frac{1}{10}\vec{k} = -\frac{3}{100}\vec{i}$$

A componente tangencial da aceleração, é dada por:

$$a_t(t=10\pi) = -\frac{3}{100}\vec{i}\cdot\vec{\tau}(t=10\pi) = -\frac{3}{100}\vec{i}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}\right) = 0$$

Portanto, no instante $t = 10\pi$ o módulo da aceleração do anel vale

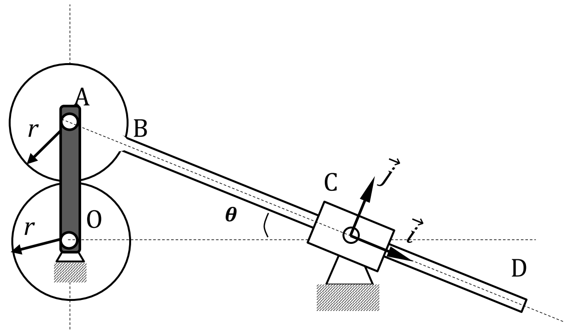
$$\vec{a}(t=10\pi) = \frac{3}{100}$$

a aceleração do anel coincide com sua componente normal, ou seja:

$$\vec{a}(t=10\pi) = \frac{3}{100}\vec{n}$$

(1,0)

QUESTÃO 2 (3,5 pontos). No mecanismo da figura, ***O*** e ***C*** são articulações fixas e ***A*** é uma articulação móvel. O disco de centro ***A*** e raio ***r*** é soldado à barra ***BD*** de modo a formar um único corpo rígido. O disco de centro ***O*** e raio ***r*** é mantido em contato, sem escorregamento, com o disco de centro ***A*** por meio da barra rígida ***OA*** e das articulações em ***O*** e em ***A***. A articulação em ***C*** é o centro de uma luva rígida no interior da qual desliza a barra ***BD***. O sistema de referência móvel $C\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ <u>é solidário à luva com centro *C*</u> **(e não ao corpo ABD)**. No instante mostrado, sabe-se que a barra ***OA*** possui vetor rotação $\vec{\omega}_{OA} = -\omega\vec{k}$, de módulo constante. Com base nessas informações pedem-se, para esse instante, em função dos parâmetros ***r***, θ, ω, e expressando as respostas no sistema de coordenadas dado:



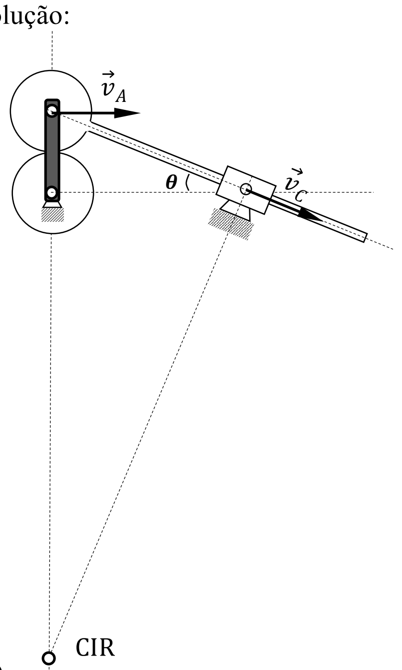
(a) localizar graficamente o CIR da peça única ***ABD***;

(b) o vetor velocidade (absoluta) do ponto ***A*** e o vetor rotação $\vec{\omega}_A$ da peça única ***ABD***;

(c) o vetor rotação $\vec{\omega}_O$ do disco de centro ***O***;

(d) a aceleração de Coriolis do ponto ***A***.

Solução:



(a) **(1,0)**

(b)

$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \left(-\omega\vec{k}\right) \wedge (A - O), \quad A \in AO, \rightarrow$

$\vec{v}_A = 2\omega r(\cos\theta\vec{\imath} + sen\,\theta\vec{\jmath})$

Da geometria, $||(A - CIR)|| = \frac{2r}{sen^2\theta}$

Para $A \in$ haste+disco,

$\vec{v}_A = \vec{\omega}_A\vec{k} \wedge (A - CIR)$

$\vec{v}_A = \vec{\omega}_A\vec{k} \wedge \frac{2r}{sen^2\theta}(-sen\,\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath})$ **(0,5)**

$2\omega r(\cos\theta\vec{\imath} + sen\,\theta\vec{\jmath}) = \frac{2r\omega_A}{sen^2\theta}(-\cos\theta\vec{\imath} - sen\,\theta\vec{\jmath})$

Por qualquer das projeções,
$\omega_A = -\omega sen^2\theta \Longrightarrow \vec{\omega}_A = -\omega\ sen^2\theta\vec{k}$ **(0,5)**

(c) Supondo E o ponto de contato entre o disco+haste e o disco de centro O tem-se, para $E \in$ disco + haste:
$\vec{v}_E = \vec{v}_A + \vec{\omega}_A \wedge (E - A)$
$\vec{v}_E = 2\omega r(\cos\theta\vec{\imath} + sen\ \theta\vec{\jmath}) +$
$\left(-\omega\ sen^2\theta\vec{k}\right) \wedge r(sen\ \theta\ \vec{\imath} - \cos\theta\ \vec{\jmath})$
$\vec{v}_E = (2\omega r - \omega r\ sen^2\theta)\cos\theta\vec{\imath} + (2\omega r - \omega r\ sen^2\theta)sen\ \theta\ \vec{\jmath}$ (1) **(0,5)**

Para $E \in$ disco de centro O
$\vec{v}_E = \vec{v}_O + \vec{\omega}_O \wedge (E - O)$
$\vec{v}_E = \omega_0\vec{k} \wedge r(-sen\ \theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath})$
$\vec{v}_E = \omega_0 r(-\cos\theta\vec{\imath} - sen\ \theta\ \vec{\jmath})$ (2)
Igualando (1) e (2) obtém-se
$\therefore \vec{\omega}_O = \omega(sen^2\theta - 2)\vec{k} = -\omega(1 + cos^2\theta)\vec{k}$ **(0,5)**

(d) A velocidade relativa do ponto A com relação ao anel (referencial móvel) é na direção da haste e a velocidade de arrastamento é perpendicular à direção da haste. Assim:

$\vec{v}_A = 2\omega r(\cos\theta\vec{\imath} + sen\ \theta\vec{\jmath})$

$\vec{v}_{A,r} = 2\omega r\cos\theta\vec{\imath}$ e $\vec{v}_{A,a} = 2\omega r sen\theta\vec{\jmath}$

$\vec{a}_{A,C} = 2\vec{\omega}_A \wedge \vec{v}_{A,r}$
$\vec{a}_{A,C} = -2\omega\ sen^2\theta\vec{k} \wedge 2\omega r\cos\theta\ \vec{\imath}$
$\vec{a}_{A,C} = -4\omega^2 r sen^2\theta\cos\theta\vec{\jmath}$ **(0,5)**

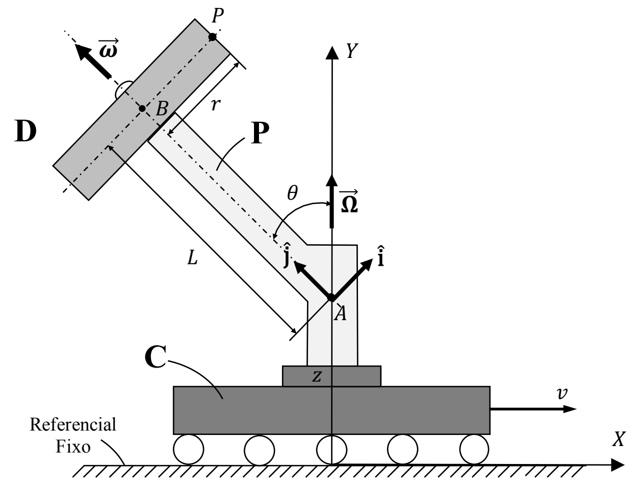
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PME 3100 – MECÂNICA 1 – Segunda Prova – 18 de outubro de 2016 –

Duração da Prova: 110 minutos

(não é permitido portar celulares, tablets, calculadoras e dispositivos similares)

QUESTÃO 3 (4,0 pontos). O suporte ***S*** é ligado por meio de um mancal a um carro que se move com velocidade $v\vec{I}$ (v constante) em relação ao solo. O suporte ***S*** gira com velocidade angular $\vec{\Omega}=\Omega\vec{J}$ (Ω constante) em relação ao carro, transportando em sua extremidade ***B*** um disco ***D*** de raio ***r*** que gira com velocidade angular $\vec{\omega}=\omega\vec{j}$ (ω constante) relativamente ao suporte. A distância entre os pontos ***A*** e ***B*** é ***L*** e o ângulo definido entre o eixo ***Y*** e a barra ***AB*** é θ (constante). A base $\vec{I}$, $\vec{J}$, $\vec{K}$ (relativa aos eixos ***X***, ***Y*** e ***Z***) é fixa ao solo e a base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ é solidária ao suporte. Expressando os resultados em termos dos versores da base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, determine para o instante em que o sistema se encontra na posição ilustrada na figura:



(a) as velocidades relativa, de arrastamento e absoluta do ponto ***P*** do disco;

(b) as acelerações relativa, de arrastamento, de Coriolis e absoluta do ponto ***P*** do disco;

(c) o vetor rotação absoluta (ou instantânea) do disco;

(d) o vetor aceleração rotacional absoluta (ou instantânea) do disco.

Solução:

a) Por composição de movimentos, a velocidade absoluta do ponto P, medida com relação ao referencial fixo, pode ser escrita como segue:

$$\vec{v}_{abs,P} = \vec{v}_{rel,P} + \vec{v}_{arrast,P} \tag{A1}$$

- <u>Velocidade relativa</u>, $\vec{v}_{rel,P}$: **(0,5)**

$$\vec{v}_{rel,P} = \underbrace{{}^{\mathbf{P}}\vec{V}_B}_{\substack{\text{vel. de B em} \\ \text{relação a } \mathbf{P}\ (=\vec{0})}} + \vec{\omega} \wedge (P - B) = \vec{0} + \omega\vec{j} \wedge (r\vec{i}) = (-\omega r)\vec{k} \tag{A2}$$

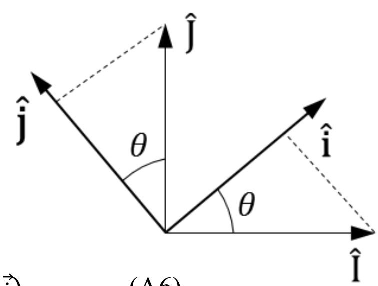
$$\vec{v}_{rel,P} = (-\omega r)\vec{k} \tag{A3}$$

- <u>Velocidade de arrastamento</u>, $\vec{v}_{arrast,P}$: **(0,5)**

$$\vec{v}_{arrast,P} = \underbrace{\vec{V}_A}_{\substack{\text{vel. de A em relação} \\ \text{ao referencial fixo } (=v\vec{I})}} + \vec{\Omega} \wedge (P - A) = v\vec{I} + \Omega\vec{J} \wedge (L\vec{j} + r\vec{i}) \tag{A4}$$

Decompondo os versores $\vec{I}$ e $\vec{J}$ na base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, tem-se:

$$\begin{aligned} \vec{I} &= cos\theta\vec{i} - sen\theta\vec{j} \\ \vec{J} &= sen\theta\vec{i} + cos\theta\vec{j} \end{aligned} \tag{A5}$$



Substituindo (a5) em (a4), tem-se:

$$\vec{v}_{arrast,P} = v(cos\theta\vec{i} - sen\theta\vec{j}) + \Omega(sen\theta\vec{i} + cos\theta\vec{j}) \wedge (L\vec{j} + r\vec{i}) \tag{A6}$$

$$\vec{v}_{arrast,P} = v(cos\theta\vec{i} - sen\theta\vec{j}) + \Omega(\mathrm{L}sen\theta - \mathrm{r}cos\theta)\vec{k} \tag{A7}$$

Finalmente, substituindo (a7) e (a3) em (a1), a velocidade absoluta do ponto P pode ser escrita, como segue:

$$\vec{v}_{abs,P} = (v cos\theta)\vec{\mathrm{i}} - (v sen\theta)\vec{\mathrm{j}} + [\Omega(\mathrm{L}sen\theta - \mathrm{r}cos\theta) - \omega r]\vec{\mathrm{k}} \qquad \text{(A8)}$$

b) De forma análoga, a aceleração absoluta do ponto P pode ser computada da seguinte forma:

$$\vec{a}_{abs,P} = \vec{a}_{rel,P} + \vec{a}_{arrast,P} + \vec{a}_{Coriolis,P} \qquad \text{(B1)}$$

- Aceleração relativa, $\vec{a}_{rel,P}$: **(0,5)**

$$\vec{a}_{rel,P} = \underbrace{{}^{\boldsymbol{P}}\vec{A}_B}_{\substack{\text{acel. de B em} \\ \text{relação a } \mathbf{P}\ (=\vec{0})}} + \underbrace{\dot{\vec{\omega}} \wedge (P - B)}_{\substack{\text{acel. angular} \\ \text{relativa } (=\vec{0})}} + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - B)] \qquad \text{(B2)}$$

$$= \vec{0} + \vec{0} + \omega\vec{\mathrm{j}} \wedge \left[\omega\vec{\mathrm{j}} \wedge \left(r\vec{\mathrm{i}}\right)\right] = \omega\vec{\mathrm{j}} \wedge \left[-\omega r\vec{\mathrm{k}}\right]$$

$$\vec{a}_{rel,P} = (-\omega^2 r)\vec{\mathrm{i}} \qquad \text{(B3)}$$

- Aceleração de arrastamento, $\vec{a}_{arrast,P}$: **(0,5)**

$$\vec{a}_{arrast,P} = \underbrace{\vec{A}_A}_{\substack{\text{acel. de A em relação} \\ \text{ao referencial fixo } (=\vec{0})}} + \underbrace{\dot{\vec{\Omega}} \wedge (P - B)}_{\substack{\text{acel. angular} \\ \text{de arrast. } (=\vec{0})}} + \vec{\Omega} \wedge \left[\vec{\Omega} \wedge (P - A)\right] \qquad \text{(B4)}$$

$$= \vec{0} + \vec{0} + \Omega\vec{\mathrm{J}} \wedge \left[\Omega\vec{\mathrm{J}} \wedge \left(L\vec{\mathrm{j}} + r\vec{\mathrm{i}}\right)\right]$$

Considerando o versor $\vec{\mathrm{J}}$ decomposto na base $\{\vec{\mathrm{i}}, \vec{\mathrm{j}}, \vec{\mathrm{k}}\}$ (eq. A5), tem-se:

$$\vec{a}_{arrast,P} = \Omega\left(sen\theta\vec{\mathrm{i}} + cos\theta\vec{\mathrm{j}}\right) \wedge \left[\Omega\left(sen\theta\vec{\mathrm{i}} + cos\theta\vec{\mathrm{j}}\right) \wedge \left(L\vec{\mathrm{j}} + r\vec{\mathrm{i}}\right)\right] \qquad \text{(B5)}$$

$$= \Omega\left(sen\theta\vec{\mathrm{i}} + cos\theta\vec{\mathrm{j}}\right) \wedge \left[\Omega(\mathrm{L}sen\theta - \mathrm{r}cos\theta)\vec{\mathrm{k}}\right]$$

$$\vec{a}_{arrast,P} = \Omega^2\left[(Lsen\theta cos\theta - \mathrm{r}cos^2\theta)\vec{\mathrm{i}} + (rsen\theta cos\theta - \mathrm{L}sen^2\theta)\vec{\mathrm{j}}\right] \qquad \text{(B6)}$$

- Aceleração de Coriolis, $\vec{a}_{Coriolis,P}$: **(0,5)**

$$\vec{a}_{Coriolis,P} = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{rel,P}$$

$$= 2\left(\Omega\vec{\mathrm{J}}\right) \wedge \left(-\omega r\vec{\mathrm{k}}\right) = 2\Omega\left(sen\theta\vec{\mathrm{i}} + cos\theta\vec{\mathrm{j}}\right) \wedge \left(-\omega r\vec{\mathrm{k}}\right) \qquad \text{(B7)}$$

$$\vec{a}_{Coriolis,P} = -2\Omega\omega r\left(cos\theta\vec{\mathrm{i}} - sen\theta\vec{\mathrm{j}}\right) \qquad \text{(B8)}$$

Finalmente, substituindo (b8), (b6) e (b3) em (b1), a aceleração absoluta do ponto P pode ser escrita, como segue:

$$\vec{a}_{abs,P} = [\Omega^2(Lsen\theta cos\theta - \mathrm{r}cos^2\theta) - 2\Omega\omega r cos\theta - \omega^2 r]\vec{\mathrm{i}} + [\Omega^2(rsen\theta cos\theta - \mathrm{L}sen^2\theta) + 2\Omega\omega r sen\theta]\vec{\mathrm{j}} \qquad \text{(B9)}$$

c) O vetor rotação absoluta (ou instantâneo) do disco é dado por: **(0,5)**

$$\vec{\omega}_{abs,\boldsymbol{D}} = \vec{\omega}_{rel,\boldsymbol{D}} + \vec{\omega}_{arrast,\boldsymbol{D}} = \vec{\omega} + \vec{\Omega} \qquad \text{(C1)}$$

$$\vec{\omega}_{abs,\boldsymbol{D}} = \omega\vec{j} + \Omega\vec{J} = \omega\vec{j} + \Omega\left(sen\theta\vec{i} + cos\theta\vec{j}\right)$$

$$\vec{\omega}_{abs,\boldsymbol{D}} = (\Omega sen\theta)\vec{i} + (\omega + \Omega cos\theta)\vec{j} \qquad \text{(C2)}$$

d) O vetor aceleração rotacional absoluta (ou instantânea) do disco é dado por: **(1,0)**

$$\vec{\alpha}_{abs,\boldsymbol{D}} = \vec{\alpha}_{rel,\boldsymbol{D}} + \vec{\alpha}_{arrast,\boldsymbol{D}} + \vec{\alpha}_{compl,\boldsymbol{D}} = \underbrace{\dot{\vec{\omega}}}_{\substack{\text{acel. angular} \\ \text{relativa } (=\vec{0})}} + \underbrace{\dot{\vec{\Omega}}}_{\substack{\text{acel. angular de} \\ \text{arrastamento } (=\vec{0})}} + \vec{\Omega} \wedge \vec{\omega} \qquad \text{(D1)}$$

$$\vec{\alpha}_{abs,\boldsymbol{D}} = \vec{0} + \vec{0} + \Omega\vec{J} \wedge \omega\vec{j} = \Omega\left(sen\theta\vec{i} + cos\theta\vec{j}\right) \wedge \omega\vec{j}$$

$$\vec{\alpha}_{abs,\boldsymbol{D}} = \Omega\omega sen\theta\vec{k} \qquad \text{(D2)}$$