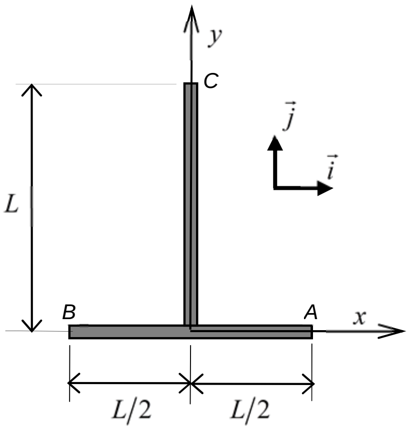
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 - Mecânica I - Segunda Prova- Duração 110 minutos – 14 de outubro de 2014

Obs. Não é permitido o uso de dispositivos eletrônicos, como calculadoras, 'tablets' e celulares.



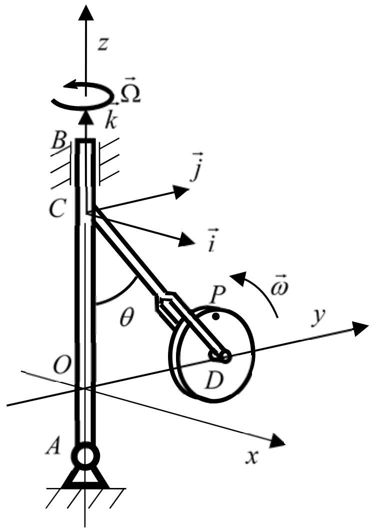
QUESTÃO 1 (3,0 pontos). A peça *ABC* mostrada na figura é formada por dois segmentos ortogonais de comprimento *L*. Em um dado instante, sabe-se que as velocidades dos pontos *A*, *B* e *C* são:

$\vec{V}_A = \dfrac{\omega L}{2}\vec{j}$, $\vec{V}_B = \dfrac{-\omega L}{2}\vec{j}$ e $\vec{V}_C = -\omega L\vec{i} + \omega L\vec{k}$

Para este instante:

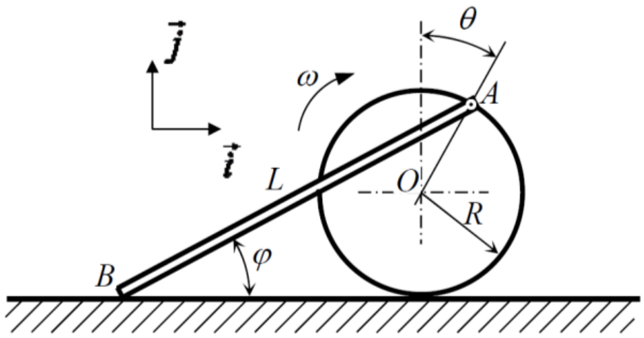
(a) mostrar que as velocidades dos pontos *A* e *C* são compatíveis com a condição de corpo rígido;
(b) calcular o vetor rotação da peça *ABC* neste instante.

QUESTÃO 2 (3,5 pontos). No sistema mostrado na figura, a haste *AB* e o garfo *CD* constituem um corpo rígido único *ACD*. A distância entre os pontos *D* e *C* é *L*, o ângulo entre os segmentos de reta *DC* e *AB* é θ (fixo) e o disco com centro em *D* tem raio *r*. O vetor rotação do eixo *AB* é $\vec{\Omega} = \Omega\,\vec{k}$ (constante), enquanto o disco gira com vetor rotação $\vec{\omega} = \omega\,\vec{i}$ (ω constante), relativamente ao corpo *ACD*. Usando como base do referencial movel os versores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ solidários ao eixo *AB*, e sabendo que no instante considerado a posição do *P* é dada por $(P - D) = r\,\vec{k}$, determinar:



(a) as velocidades relativa, de arrastamento e absoluta do ponto *P*;
(b) as acelerações relativa, de arrastamento, de Coriolis e absoluta do ponto *P*;
(c) o vetor rotação absoluto do disco;
(d) a aceleração rotacional absoluta do disco.

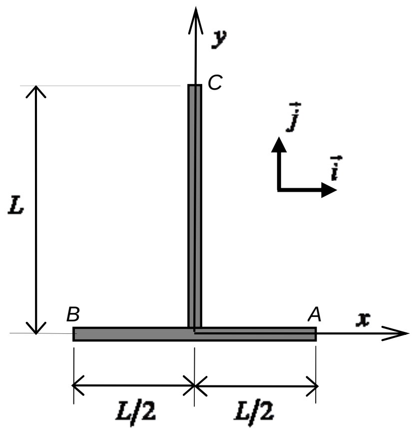
QUESTÃO 3 (3,5 pontos). A barra *AB* é articulada em *A* e o ponto *B* escorrega sobre o plano. O disco de centro *O* e raio *R* rola sem escorregar sobre o plano, com velocidade angular $\vec{\omega} = -\omega\,\vec{k}$ constante. Pede-se determinar:



a) graficamente o CIR do disco e o da barra;
b) a relação entre os ângulos φ e θ;
c) o vetor de rotação $\vec{\Omega}$ da barra;
d) a velocidade vetorial do ponto B;
e) a aceleração vetorial do ponto A;
f) os valores de θ para os quais a barra tem um ato de movimento de translação.

Obs.: utilize os versores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ indicados.

RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 1 (3,0 pontos) - A peça *ABC* mostrada na figura é formada por dois segmentos ortogonais de comprimento *L*. Em um dado instante, sabe-se que as velocidades dos pontos *A*, *B* e *C* são:



$$\vec{V}_A = \frac{\omega L}{2}\vec{j}\ ,\ \vec{V}_B = \frac{-\omega L}{2}\vec{j}\ \text{ e }\ \vec{V}_C = -\omega L\vec{i} + \omega L\vec{k}$$

Para este instante:

(a) mostrar que as velocidades dos pontos *A* e *C* são compatíveis com a condição de corpo rígido $(C-A) = -\frac{L}{2}\vec{i} + L\,\vec{j}$

Propriedade fundamental de corpos rígidos:

$$\vec{V}_C.(C-A) = \vec{V}_A.(C-A) \qquad \Rightarrow \left(-\omega L\vec{i} + \omega L\vec{k}\right).\left(-\frac{L}{2}\vec{i} + L\,\vec{j}\right) = \left(\frac{\omega L}{2}\vec{j}\right).\left(-\frac{L}{2}\vec{i} + L\,\vec{j}\right)$$ **(0,5)**

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\omega L^2}{2} = \frac{\omega L^2}{2}}$$ (0,5)

(b) calcular o vetor rotação $\vec{\Omega} = \Omega_x\vec{i} + \Omega_y\vec{j} + \Omega_z\vec{k}$ da peça *ABC* neste instante: condição de corpo rígido para pontos *A* e *B*:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{\Omega}\wedge(A-B) \qquad \Rightarrow \frac{\omega L}{2}\vec{j} = -\frac{\omega L}{2}\vec{j} + (\Omega_x\vec{i} + \Omega_y\vec{j} + \Omega_z\vec{k})\wedge(L\vec{i})$$

$$\Rightarrow \omega L\vec{j} = -\Omega_y L\vec{k} + \Omega_z L\vec{j} \qquad \Rightarrow \boxed{\Omega_z = \omega} \ \text{ e } \ \boxed{\Omega_y = 0}$$ **(1,0)**

Condição de corpo rígido para pontos *A* e *C*:

$$\vec{V}_C = \vec{V}_A + \vec{\omega}\wedge(C-A) \qquad \Rightarrow -\omega L\vec{i} + \omega L\vec{k} = \frac{\omega L}{2}\vec{j} + (\Omega_x\vec{i} + \Omega_y\vec{j} + \Omega_z\vec{k})\wedge\left(-\frac{L}{2}\vec{i} + L\vec{j}\right)$$

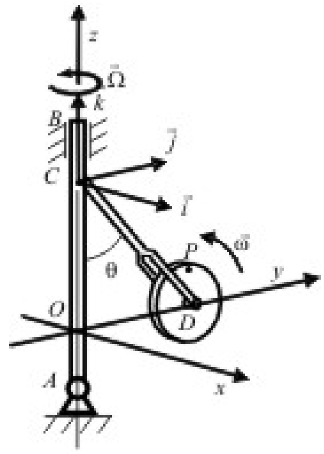
$$\Rightarrow -\omega L\vec{i} - \frac{\omega L}{2}\vec{j} + \omega L\vec{k} = \Omega_x L\vec{k} + \Omega_y\frac{L}{2}\vec{k} - \Omega_z\frac{L}{2}\vec{j} - \Omega_z L\vec{i}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\omega L = -\Omega_z L \Rightarrow \Omega_z = \omega \qquad OK \\ -\dfrac{\omega L}{2} = -\dfrac{\Omega_z L}{2} \Rightarrow \Omega_z = \omega \qquad OK \\ \omega L = \Omega_x L + \Omega_y \dfrac{L}{2} \end{cases}$$

Como $\Omega_y = 0$, então da última equação tem-se que $\boxed{\Omega_x = \omega}$

Portanto $\boxed{\vec{\Omega} = \Omega_x\vec{i} + \Omega_z\vec{k} = \omega\vec{i} + \omega\vec{k}}$ **(1,0)**

RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 2 (3,5 pontos) – No sistema mostrado na figura, a haste *AB* e o garfo *CD* constituem um corpo rígido único *ACD*. A distância entre os pontos *D* e *C* é *L*, o ângulo entre os segmentos de reta *DC* e *AB* é θ (fixo) e o disco com centro em *D* tem raio *r*. O vetor rotação do eixo *AB* é $\vec{\Omega} = \Omega\,\vec{k}$ (constante), enquanto o disco gira com vetor rotação $\vec{\omega} = \omega\,\vec{i}$ (ω constante), relativamente ao corpo *ACD*. Usando como base do referencial movel os versores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ solidários ao eixo *AB*, e sabendo que no instante considerado a posição do *P* é dada por $(P-D) = r\,\vec{k}$, determinar:



(a) as velocidades relativa, de arrastamento e absoluta do ponto *P*

Movimento relativo: do disco

$$\vec{V}_{Prel} = \vec{V}_{Drel} + \vec{\omega} \wedge (P-D) \Rightarrow \boxed{\vec{V}_{Prel} = -\omega\, r\, \vec{j}} \qquad (0,5)$$

Movimento de arrastamento: do eixo *AB*

$$\vec{V}_{Parr} = \vec{V}_{Carr} + \vec{\Omega} \wedge (P-C) \Rightarrow \vec{V}_{Parr} = \Omega\vec{k} \wedge [L sen\theta\, \vec{j} - (L\cos\theta - r)\vec{k}] \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{V}_{Parr} = -\Omega\, L sen\theta\, \vec{i}}$$

Composição de movimentos:

$$\vec{V}_{Pabs} = \vec{V}_{Prel} + \vec{V}_{Parr} \Rightarrow \boxed{\vec{V}_{Pabs} = -\Omega\, L sen\theta\, \vec{i} - \omega\, r\, \vec{j}} \qquad (0,5)$$

(b) as acelerações relativa, de arrastamento, de Coriolis e absoluta do ponto *P*

Movimento relativo: do disco

$$\vec{a}_{Prel} = \vec{a}_{Drel} + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P-D) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P-D)] \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{Prel} = -\omega^2\, r\, \vec{k}} \qquad \mathbf{(0,5)}$$

Movimento de arrastamento: do eixo *AB*

$$\vec{a}_{Parr} = \vec{a}_{Carr} + \dot{\vec{\Omega}} \wedge (P-C) + \vec{\Omega} \wedge [\vec{\Omega} \wedge (P-C)] \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{Parr} = -\Omega^2\, L sen\theta\, \vec{j}} \qquad \mathbf{(0,5)}$$

Composição de movimentos:

$$\vec{a}_{Pcor} = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{Prel} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{Pcor} = 2\Omega\, \omega\, r\vec{i}}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{Pabs} = \vec{a}_{Prel} + \vec{a}_{Parr} + \vec{a}_{Pcor} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{Pabs} = 2\,\omega\,\Omega\, r\vec{i} - \Omega^2\, L sen\theta\, \vec{j} - \omega^2\, r\, \vec{k}} \qquad \mathbf{(0,5)}$$

(c) Vetor rotação absoluto do disco

$$\vec{\omega}_{abs} = \vec{\omega}_{rel} + \vec{\omega}_{arr} \Rightarrow \vec{\omega}_{abs} = \vec{\omega} + \vec{\Omega} \Rightarrow \boxed{\vec{\omega}_{abs} = \omega\vec{i} + \Omega\vec{k}} \qquad \mathbf{(0,5)}$$

(d) Aceleração rotacional absoluta do disco

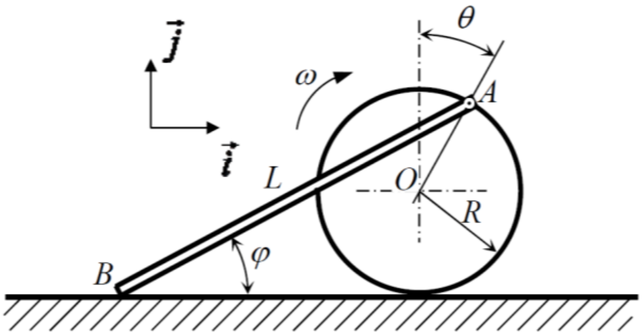
$$\dot{\vec{\omega}}_{abs} = \dot{\vec{\omega}}_{rel} + \dot{\vec{\omega}}_{arr} + \dot{\vec{\omega}}_{com} \Rightarrow \dot{\vec{\omega}}_{abs} = \vec{0} + \vec{0} + \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{\omega}_{rel} \Rightarrow \boxed{\dot{\vec{\omega}}_{abs} = \Omega\omega\, \vec{j}} \qquad \mathbf{(0,5)}$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 3 (3,5 pontos) - A barra AB é articulada em A e o ponto B escorrega sobre o plano. O disco de centro O e raio R rola sem escorregar sobre o plano, com velocidade angular $\vec{\omega} = -\omega\,\vec{k}$ constante. Pede-se determinar:

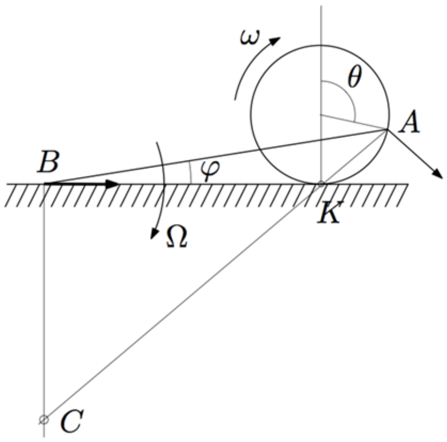
Obs.: utilize os versores $\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}$ indicados.



a) graficamente o CIR do disco e o da barra: (0,5 ponto para cada CIR)

O ponto C da figura abaixo indica o CIR da barra.

O CIR do disco é o ponto de contato K.



(0,5 + 0,5)

b) a relação entre os ângulos φ e θ:

A relação entre $\sin\varphi$ e $\cos\theta$ é encontrada por inspeção da figura.

$\boxed{L\sin\varphi = R + R\cos\theta}$ **(0,5)**

c) o vetor de rotação $\vec{\Omega}$ da barra:

Pela figura, $\vec{\Omega} = -\Omega\vec{k} = \dot{\varphi}\vec{k}$. Derivamos a relação geométrica obtida no item b, para obter

$L\dot{\varphi}\cos\varphi = -\dot{\theta}R\sin\theta$

Também da figura, $\omega = +\dot{\theta}$. Daí: $\boxed{\dot{\varphi} = \frac{-\omega R\sin\theta}{L\cos\varphi}, \vec{\Omega} = \frac{-\omega R\sin\theta}{L\cos\varphi}\vec{k}}$ **(0,5)**

d) a velocidade vetorial do ponto B:

A velocidade do ponto B ($\vec{v_B} = v_B\vec{i}$) pode ser encontrada usando-se a propriedade fundamental dos sólidos. Note que a direção e sentido do vetor $A - B$ é $(\cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j})$.

$$\vec{v_A} \circ (\cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j}) = v_B\vec{i} \circ (\cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j}) \qquad (1)$$

A velocidade do ponto A é calculada pela Fórmula Fundamental da Cinemática (Poisson):

$$\vec{v_A} = -\omega\vec{k} \wedge (A - K) \quad => \quad \vec{v_A} = -R\omega\sin\theta\vec{j} + R\omega(1 + \cos\theta)\vec{i} \qquad (2)$$

De (1) e (2), obtemos:

$$v_B = R(1 + \cos\theta)\omega - R\omega\sin\theta\tan\varphi$$

Daí: $\boxed{\vec{v_B} = R\omega[(1 + \cos\theta) - \sin\theta\tan\varphi]\vec{i}}$ **(0,5)**

e) a aceleração vetorial do ponto A;

Como a aceleração do ponto O é nula e a velocidade angular do disco é constante, a aceleração do ponto A é obtida simplesmente por

$$\boxed{\vec{a_A} = \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (A - O)] = -\omega^2 R(\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j})} \quad \textbf{(0,5)}$$

f) os valores de θ para os quais a barra tem um ato de movimento de translação.

Para translação, basta encontrar $\theta \in [0,2\pi[$ que satisfaz $\vec{v_A} = \vec{v_B}$.

Imediatamente vemos que $\boxed{\theta = 0 \text{ ou } \theta = \pi.}$ **(0,5)**