ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2100 - Mecânica A - Segunda Prova – 15 de outubro de 2013
Duração: 100 minutos

OBS. Não é permitido o uso de dispositivos eletrônicos, como calculadoras, tablets e celulares

QUESTÃO 1 (2,5 pontos). Sabendo que os pontos A(1,0,0) , B(0,1,1) e C(-1,0,1) possuem, respectivamente, velocidades $\vec{v}_A = 3\vec{j}$, $\vec{v}_B = -\vec{i} + 2\vec{k}$ e $\vec{v}_C = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$

(a) verifique que os pontos A e B podem pertencer a um mesmo corpo rígido;

(b) supondo que os pontos A, B e C pertençam ao mesmo corpo rígido, determine o seu vetor rotação.

Resolução

(a)

Condição necessária:

$$\vec{v}_A \cdot (B - A) = \vec{v}_B \cdot (B - A) \qquad (0{,}5)$$

Substituindo os valores obtém-se:

$$3\vec{j} \cdot \left(-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right) = \left(-\vec{i} + 2\vec{k}\right) \cdot \left(-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right) \Rightarrow 3 = 1 + 2$$

$\therefore A$ e B podem pertencer a um mesmo corpo rígido (0,5)

(b) Eq. fundamental da cinemática do sólido para A e B:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (B - A) = 3\vec{j} + \left(\omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}\right) \wedge \left(-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right)$$
$$\Rightarrow -\vec{i} + 2\vec{k} = 3\vec{j} + \left(\omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}\right) \wedge \left(-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right)$$
$$\Rightarrow -\vec{i} + 2\vec{k} = 3\vec{j} + \omega_x \vec{k} - \omega_x \vec{j} + \omega_y \vec{k} + \omega_y \vec{i} - \omega_z \vec{j} - \omega_z \vec{i}$$
$$\Rightarrow -\vec{i} + 2\vec{k} = (\omega_y - \omega_z)\vec{i} + (3 - \omega_x - \omega_z)\vec{j} + (\omega_x + \omega_y)\vec{k}$$

$$\begin{cases} \omega_y - \omega_z = -1 \quad (1) \\ \omega_x + \omega_z = 3 \quad (2) \\ \omega_x + \omega_y = 2 \quad (eq.\,LD\, com\ (1)\, e\ (2)) \end{cases} \qquad (0{,}5)$$

Eq. fundamental da cinemática do sólido para A e C:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (C - A) = 3\vec{j} + \left(\omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}\right) \wedge \left(-2\vec{i} + \vec{k}\right)$$
$$\Rightarrow \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} = 3\vec{j} - \omega_x \vec{j} + 2\omega_y \vec{k} + \omega_y \vec{i} - 2\omega_z \vec{j}$$
$$\Rightarrow \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} = \omega_y \vec{i} + (3 - \omega_x - 2\omega_z)\vec{j} + 2\omega_y \vec{k}$$

$$\begin{cases} \omega_y = 1 \\ \omega_x + 2\omega_z = 5 \\ \omega_y = 1 \quad (3) \end{cases} \qquad (0{,}5)$$

Resolvendo-se o sistema de equações (1), (2) e (3) acima, obtém-se, finalmente:

$$\vec{\omega} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} \qquad (0{,}5)$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica

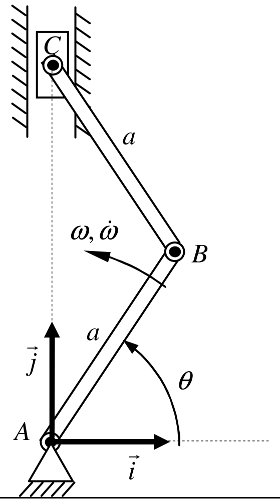
QUESTÃO 2 (3,5 pontos). O mecanismo da figura ao lado é composto pelas barras AB e BC, de mesmo comprimento a, articuladas entre si por meio de um pino B. A extremidade A da barra AB é vinculada a uma articulação fixa e a extremidade C da barra BC é ligada a um bloco que se move ao longo de uma guia vertical. Sabendo que a barra AB gira com velocidade angular ω e aceleração angular $\dot{\omega}$, determine:

(a) o centro instantâneo de rotação da barra BC;

(b) a velocidade $\vec{v}_B$ e a aceleração $\vec{a}_B$ do ponto B;

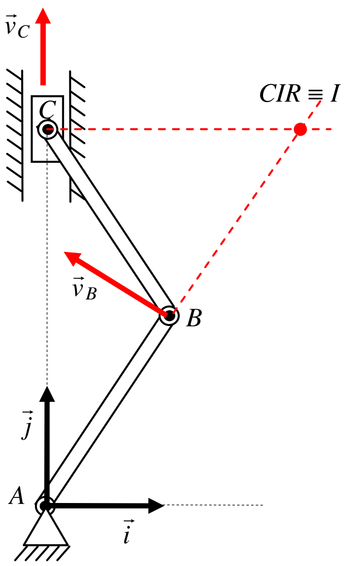
(c) a velocidade angular ω_{BC} da barra BC e a velocidade do ponto C;

(d) a aceleração angular $\dot{\omega}_{BC}$ da barra BC e a aceleração do ponto C.



Resolução

(a)



(0,5)

$$y_C = |C - A| = 2a\sin\theta$$

$$x_C = 2|B - A|\cos\theta = 2a\cos\theta$$

$$\Rightarrow (CIR_{BC} - A) = 2a\cos\theta\vec{i} + 2a\sin\theta\vec{j}$$

(b) $B \in AB$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \omega\vec{k} \wedge (B - A) = \vec{0} + \omega\vec{k} \wedge (a\cos\theta\vec{i} + a\sin\theta\vec{j})$$

$$\Rightarrow \vec{v}_B = -\omega a\sin\theta\vec{i} + \omega a\cos\theta\vec{j} \qquad (0,5)$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \dot{\omega}\vec{k} \wedge (B - A) + \omega\vec{k} \wedge [\omega\vec{k} \wedge (B - A)]$$

$$= \vec{0} + \dot{\omega}\vec{k} \wedge (a\cos\theta\vec{i} + a\sin\theta\vec{j}) + \omega\vec{k} \wedge [\omega\vec{k} \wedge (a\cos\theta\vec{i} + a\sin\theta\vec{j})]$$

$$\Rightarrow \vec{a}_B = -\dot{\omega}a\sin\theta\vec{i} + \dot{\omega}a\cos\theta\vec{j} + \omega\vec{k} \wedge [\omega a(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j})]$$

$$\Rightarrow \vec{a}_B = -\dot{\omega}a\sin\theta\vec{i} + \dot{\omega}a\cos\theta\vec{j} - \omega^2 a[(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j})]$$

$$\Rightarrow \vec{a}_B = -(\dot{\omega}\sin\theta + \omega^2\cos\theta)a\vec{i} + (\dot{\omega}\cos\theta - \omega^2\sin\theta)a\vec{j}$$

(0,5)

(c) Eq. fundamental da cinem. do sólido: $B \in BC$ e $I \in$ *plano solidário a* $BC, I \equiv CIR_{BC}$:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_I + \omega_{BC}\vec{k} \wedge (B - I) = \vec{0} + \omega_{BC}\vec{k} \wedge (-a\cos\theta\vec{i} - a\sin\theta\vec{j})$$

$$\Rightarrow \omega a(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}) = \omega_{BC}\vec{k} \wedge (-a\cos\theta\vec{i} - a\sin\theta\vec{j})$$

$$\Rightarrow \omega a(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}) = \omega_{BC}a(\sin\theta\vec{i} - \cos\theta\vec{j})$$

$$\begin{cases} -\omega a\sin\theta = \omega_{BC}a\sin\theta \\ \omega a\cos\theta = -\omega_{BC}a\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \omega_{BC} = -\omega \qquad (0,5)$$

Eq. fundamental da cinem. do sólido: $B \in BC$ e $C \in BC$, ou seja:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \omega_{BC}\vec{k} \wedge (C - B)$$

$$= \omega a(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}) - \omega\vec{k} \wedge (-a\cos\theta\vec{i} + a\sin\theta\vec{j})$$

$$\Rightarrow \vec{v}_C = \omega a(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}) + \omega a(\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j})$$

$$\Rightarrow \vec{v}_C = 2\omega a\cos\theta\vec{j} \qquad (0,5)$$

(d) aceleração angular da barra BC:

$$\dot{\omega}_{BC} = \frac{d\omega_{BC}}{dt} = -\dot{\omega} \qquad (0,5)$$

aceleração do ponto $C \in BC$:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \dot{\omega}_{BC}\vec{k} \wedge (C - B) + \omega_{BC}\vec{k} \wedge [\omega_{BC}\vec{k} \wedge (C - B)]$$

$$\vec{a}_C = -(\dot{\omega}\sin\theta + \omega^2\cos\theta)a\vec{i} + (\dot{\omega}\cos\theta - \omega^2\sin\theta)a\vec{j}$$

$$-\dot{\omega}\vec{k} \wedge a(-\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}) - \omega\vec{k} \wedge [-\omega\vec{k} \wedge a(-\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j})]$$

$$\vec{a}_C = -(\dot{\omega}\sin\theta + \omega^2\cos\theta)a\vec{i} + (\dot{\omega}\cos\theta - \omega^2\sin\theta)a\vec{j}$$

$$+\dot{\omega}a(\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}) - \omega\vec{k} \wedge [\omega a(\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j})]$$

$$\vec{a}_C = -(\dot{\omega}\sin\theta + \omega^2\cos\theta)a\vec{i} + (\dot{\omega}\cos\theta - \omega^2\sin\theta)a\vec{j}$$

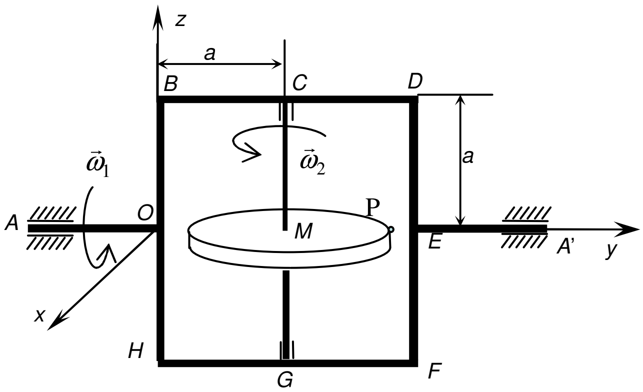
$$+\dot{\omega}a(\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}) + \omega^2 a(+\cos\theta\vec{i} - \sin\theta\vec{j})$$

$$\vec{a}_C = 2a(\dot{\omega}\cos\theta - \omega^2\sin\theta)\vec{j} \qquad (0,5)$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

QUESTÃO 3 (4,0 pontos). O disco de centro M e raio R, conectado a um eixo vertical, gira com velocidade angular ω_2 constante, em torno do eixo apoiado nos mancais C e G, que estão ligados ao aro quadrado OBDEFH, o qual, por sua vez, gira com velocidade angular ω_1 constante em torno do eixo Oy, apoiado sobre os mancais A e A' fixos. O ponto P do disco está alinhado com os pontos A e A'. O sistema de eixos Oxyz é solidário ao aro quadrado OBDEFH que é o referencial móvel. Pede-se determinar:



(a) as velocidades relativa $\vec{v}_{Prel}$, de arrastamento $\vec{v}_{Parr}$ e absoluta $\vec{v}_P$ do ponto P do disco;
(b) as acelerações relativa $\vec{a}_{Prel}$, de arrastamento $\vec{a}_{Parr}$, complementar $\vec{a}_{Pc}$ e absoluta $\vec{a}_P$ do ponto P do disco;
(c) o vetor rotação absoluta $\vec{\omega}$ do disco;
(d) o vetor aceleração angular absoluta $\dot{\vec{\omega}}$ do disco;
(e) a equação da reta correspondente ao eixo helicoidal instantâneo do disco.

Obs.: $\vec{\omega}_1 = \omega_1 \vec{j}$ e $\vec{\omega}_2 = \omega_2 \vec{k}$

Resolução

(a) (1,0)

$\vec{v}_{Prel} = \omega_2 \vec{k} \wedge (P - M) = \omega_2 \vec{k} \wedge R\vec{j} = -\omega_2 R\vec{i}$

$\vec{v}_{Parr} = \vec{0}$

A velocidade absoluta de *P*, é:

$\vec{v}_P = \vec{v}_{Parr} + \vec{v}_{Prel} = -\omega_2 R\vec{i}$

(b) (1,5)

$\vec{a}_{Prel} = \omega_2 \vec{k} \wedge \left[\omega_2 \vec{k} \wedge (P - M)\right] = \omega_2 \vec{k} \wedge \left[\omega_2 \vec{k} \wedge R\vec{j}\right] = -\omega_2^2 R\vec{j}$

$\vec{a}_{Parr} = \vec{0}$

$\vec{a}_{Pc} = 2\vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{v}_{Prel} = 2\omega_1 \vec{j} \wedge \left(-\omega_2 R\vec{i}\right) = 2\omega_1 \omega_2 R\vec{k}$

Portanto, a aceleração absoluta do ponto *P*, é:

$\vec{a}_P = -\omega_2^2 R\vec{j} + 2\omega_1 \omega_2 R\vec{k}$

(c) (0,5)

O vetor rotação absoluta do disco é dado por:

$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = \omega_1 \vec{j} + \omega_2 \vec{k}$

(d) (0.5)

O vetor aceleração angular absoluta do disco é dado por:

$\dot{\vec{\omega}} = \dot{\vec{\omega}}_1 + \dot{\vec{\omega}}_2 + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_2 = \omega_1 \vec{j} \wedge \omega_2 \vec{k} = \omega_1 \omega_2 \vec{i}$

(

e) (0.5)

O ponto M do disco tem velocidade nula; o eixo helicoidal instantâneo passa por M e está alinhado com o versor $\vec{\omega}/|\vec{\omega}|$, da direção do vetor rotação absoluta.

Portanto, os pontos E do disco que têm velocidade mínima (no caso, nula), são dados por:

$E = M + \lambda \dfrac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}$