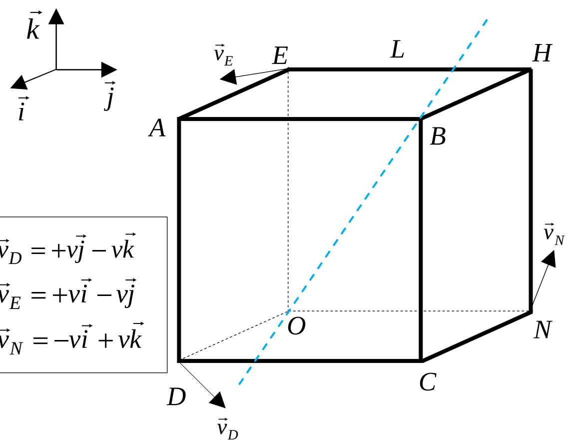
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231 CEP 05508-970, São Paulo, SP
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886
Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2100 – MECÂNICA A – Segunda Prova – 16 de outubro de 2012

Gabarito

QUESTÃO 1 (3,5 pontos) – No instante mostrado na figura, a posição do cubo de aresta L é tal que $\overline{OD}$ é paralelo a $\vec{i}$, $\overline{ON}$ é paralelo a $\vec{j}$ e $\overline{OE}$ é paralelo a $\vec{k}$. Nesse mesmo instante são conhecidas as velocidades dos vértices D, E e N (ver quadro ao lado da figura). Os versores $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ são fixos.



$$\vec{v}_D = +v\vec{j} - v\vec{k}$$
$$\vec{v}_E = +v\vec{i} - v\vec{j}$$
$$\vec{v}_N = -v\vec{i} + v\vec{k}$$

Para o instante mostrado na figura:
a) Usando somente a propriedade fundamental da cinemática do corpo rígido, determine a velocidade $\vec{v}_O$ do ponto O.
b) Determine o vetor de rotação $\vec{\omega}$ do cubo.
c) Localize graficamente o eixo helicoidal instantâneo e diga qual é o ato de movimento do cubo.

Solução:

a)
$$\vec{v}_O \cdot (D-O) = \vec{v}_D \cdot (D-O) \Rightarrow \left(v_{Ox}\vec{i} + v_{Oy}\vec{j} + v_{Oz}\vec{k}\right)\cdot L\vec{i} = \left(+v\vec{j} - v\vec{k}\right)\cdot L\vec{i} \Rightarrow v_{Ox} = 0$$
$$\vec{v}_O \cdot (N-O) = \vec{v}_N \cdot (N-O) \Rightarrow \left(v_{Ox}\vec{i} + v_{Oy}\vec{j} + v_{Oz}\vec{k}\right)\cdot L\vec{j} = \left(-v\vec{i} + v\vec{k}\right)\cdot L\vec{j} \Rightarrow v_{Oy} = 0$$
$$\vec{v}_O \cdot (E-O) = \vec{v}_E \cdot (E-O) \Rightarrow \left(v_{Ox}\vec{i} + v_{Oy}\vec{j} + v_{Oz}\vec{k}\right)\cdot L\vec{k} = \left(+v\vec{i} - v\vec{j}\right)\cdot L\vec{k} \Rightarrow v_{Oz} = 0$$

Portanto: $\boxed{\vec{v}_O = \vec{0}}$ (1,0)

b)
$$\vec{v}_D = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (D-O) \Rightarrow \left(+v\vec{j} - v\vec{k}\right) = \vec{0} + \left(\omega_x\vec{i} + \omega_y\vec{j} + \omega_z\vec{k}\right) \wedge L\vec{i} \Rightarrow v\vec{j} - v\vec{k} = -\omega_y L\vec{k} + \omega_z L\vec{j}$$

Portanto:

$$\omega_y = \frac{v}{L}$$ (0,5)

$$\omega_z = \frac{v}{L}$$

$$\vec{v}_N = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (N-O) \Rightarrow \left(-v\vec{i} + v\vec{k}\right) = \vec{0} + \left(\omega_x\vec{i} + \frac{v}{L}\vec{j} + \frac{v}{L}\vec{k}\right) \wedge L\vec{j} \Rightarrow -v\vec{i} + v\vec{k} = \omega_x L\vec{k} - v\vec{i} \Rightarrow \omega_x = \frac{v}{L}$$ (0,5)

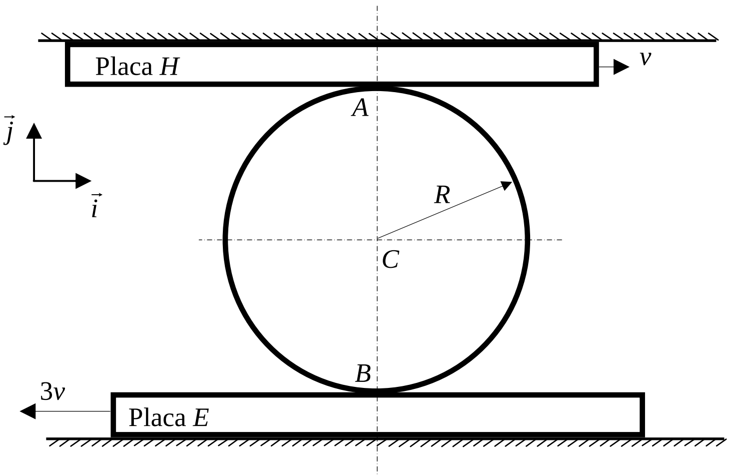
Resultando em: $\boxed{\vec{\omega} = \frac{v}{L}\left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right)}$ (0,5)

c)
Como a velocidade do ponto O é nula nesse instante, ele pertence ao eixo helicoidal instantâneo. Como esse eixo é paralelo ao vetor de rotação, observa-se que o eixo helicoidal instantâneo passa pelos pontos O e B (reta azul desenhada na figura). Observa-se também que o cubo tem ato de movimento de rotação. (0,5 - localização gráfica)
+ (0,5 - ato de movimento)

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231   CEP 05508-970, São Paulo, SP
Telefone: (0xx11) 3091 5337   Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica



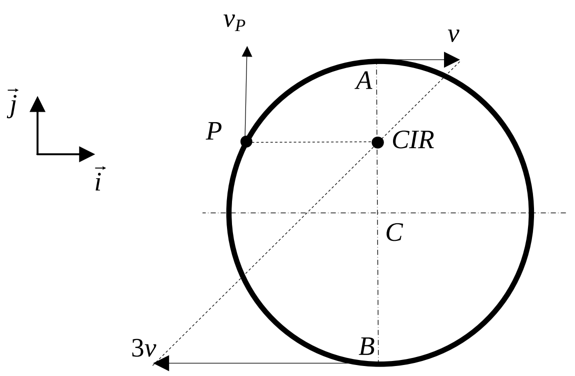
QUESTÃO 2 (3,5 pontos) – A figura mostra um disco de centro C e raio R entre duas placas paralelas entre si. A placa H translada com velocidade $\vec{v}_H = v\vec{i}$, constante, e a placa E translada com velocidade $\vec{v}_E = -3v\vec{i}$, constante. Não há escorregamento entre o disco e as placas nos pontos de contato A e B.

a) Determine a posição do Centro Instantâneo de Rotação (*CIR*) do disco, e calcule o vetor de rotação $\vec{\omega}$ do disco.

b) Localize graficamente um ponto P da periferia do disco, à esquerda do segmento AB, cuja velocidade $\vec{v}_P$ é na direção $\vec{j}$. Calcule a velocidade $\vec{v}_P$.

c) Calcule as acelerações $\vec{a}_C$ do ponto C e $\vec{a}_P$ do ponto P.

Solução:



(0,5)

a) Sejam os pontos *C(0,0)*, *A(0,R)*, *B(-R,0)*. Graficamente, a abscissa do CIR é *x=0*. Seja *b* a ordenada do CIR

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{CIR} + \vec{\omega} \wedge (A - CIR) \Rightarrow v\vec{i} = \vec{0} + \omega\vec{k} \wedge (R-b)\vec{j}$$

$$\Rightarrow v\vec{i} = -\omega(R-b)\vec{i} \quad (1)$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{CIR} + \vec{\omega} \wedge (B - CIR) \Rightarrow -3v\vec{i} = \vec{0} + \omega\vec{k} \wedge (-R-b)\vec{j}$$

$$\Rightarrow 3v\vec{i} = -\omega(R+b)\vec{i} \quad (2)$$

De (1) e (2),

$$\frac{v}{3v} = \frac{-\omega(R-b)}{-\omega(R+b)} \Rightarrow b = \frac{R}{2}$$

$$v = -\omega(R-b) = -\omega(R - R/2) \Rightarrow \omega = -\frac{2v}{R} \Rightarrow \vec{\omega} = -\frac{2v}{R}\vec{k}$$

$$\frac{v}{3v} = \frac{-\omega(R-b)}{-\omega(R+b)} \Rightarrow b = \frac{R}{2}; \quad v = -\omega(R-b) = -\omega(R - R/2) \Rightarrow \omega = -\frac{2v}{R} \Rightarrow \vec{\omega} = -\frac{2v}{R}\vec{k}$$

Portanto:

$\boxed{CIR\left(0;\frac{R}{2}\right)}$ e $\boxed{\vec{\omega}=-\frac{2v}{R}\vec{k}}$
(0,5) (0,5)

b) Seja P(-a,b) o ponto procurado, indicado na figura,

$$\vec{v}_P=\vec{v}_{CIR}+\vec{\omega}\wedge(P-CIR)\Rightarrow v_P\vec{j}=\vec{0}-\frac{2v}{R}\vec{k}\wedge(-a\vec{i})\Rightarrow v_P\vec{j}=\frac{2va}{R}\vec{j}$$

$$\Delta CAP: a^2=R^2-\left(R/2\right)^2\Rightarrow a=R\sqrt{3}/2\Rightarrow P\left(-\frac{R\sqrt{3}}{2};\frac{R}{2}\right)$$ (0,5)

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}_P=v\sqrt{3}\vec{j}}$$ (0,5)

c)

$$\vec{v}_C=\vec{v}_A+\vec{\omega}\wedge(C-A)\Rightarrow\vec{v}_C=v\vec{i}-\frac{2v}{R}\vec{k}\wedge(-R\vec{j})\Rightarrow\vec{v}_C=-v\vec{i}$$

$$\vec{a}_C=\dot{\vec{v}}_C\Rightarrow\boxed{\vec{a}_C=\vec{0}}$$ (0,5)

$$\vec{a}_P=\vec{a}_C+\dot{\vec{\omega}}\wedge(P-C)+\vec{\omega}\wedge[\vec{\omega}\wedge(P-C)]=-\frac{2v}{R}\vec{k}\wedge\left[-\frac{2v}{R}\vec{k}\wedge\left(-\frac{R\sqrt{3}}{2}\vec{i}+\frac{R}{2}\vec{j}\right)\right]$$

$$\Rightarrow\boxed{\vec{a}_P=\frac{2v^2}{R}\left(\sqrt{3}\vec{i}-\vec{j}\right)}$$ (0,5)

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231 CEP 05508-970, São Paulo, SP
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

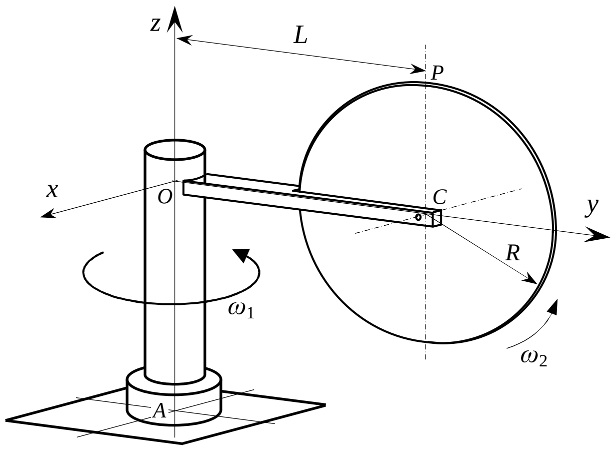
Departamento de Engenharia Mecânica

QUESTÃO 3 (3,0 pontos) – No mecanismo mostrado na figura, o segmento $\overline{OA}$ é fixo, e a barra *OC*, de comprimento *L* e perpendicular a $\overline{OA}$, possui vetor de rotação $\vec{\omega}_1 = \omega_1 \vec{k}$ (constante) em relação a um referencial fixo no solo. O disco, de centro *C* e raio *R*, contido no plano *Oyz*, possui um vetor de rotação $\vec{\omega}_2 = \omega_2 \vec{i}$ em relação à barra *OC*, sendo ω_2 constante. O sistema de coordenadas *Oxyz* é fixo na barra *OC*. Considerando a barra *OC* como referencial móvel, e o instante mostrado na figura, quando $\overline{CP}$ é paralelo ao eixo *Oz*, determine:

a) as velocidades relativa ($\vec{v}_{P,rel}$), de arrastamento ($\vec{v}_{P,arr}$) e absoluta ($\vec{v}_{P,abs}$) do ponto *P*.

b) as acelerações relativa ($\vec{a}_{P,rel}$), de arrastamento ($\vec{a}_{P,arr}$) e absoluta ($\vec{a}_{P,abs}$) do ponto *P*.

c) o vetor de rotação absoluto ($\vec{\omega}_{D,abs}$) e o vetor aceleração angular absoluto ($\vec{\alpha}_{D,abs}$) do disco.



Solução:

a)

$$\vec{v}_{P,rel} = \vec{v}_{C,rel} + \vec{\omega}_{rel} \wedge (P - C) = \vec{0} + \omega_2 \vec{i} \wedge R\vec{k} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{P,rel} = -\omega_2 R\vec{j}}$$

$$\vec{v}_{P,arr} = \vec{v}_O + \vec{\omega}_{arr} \wedge (P - O) = \vec{0} + \omega_1 \vec{k} \wedge \left(L\vec{j} + R\vec{k}\right) \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{P,arr} = -\omega_1 L\vec{i}}$$

(0,5)

$$\vec{v}_{P,abs} = \vec{v}_{P,rel} + \vec{v}_{P,arr}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}_{P,abs} = -\omega_1 L\vec{i} - \omega_2 R\vec{j}}$$ (0,5)

b)

$$\vec{a}_{P,rel} = \vec{a}_{C,rel} + \vec{\alpha}_{rel} \wedge (P - C) + \vec{\omega}_{rel} \wedge [\vec{\omega}_{rel} \wedge (P - C)]$$

$$\vec{a}_{P,rel} = \vec{0} + \vec{0} + \omega_2 \vec{i} \wedge \left[\omega_2 \vec{i} \wedge R\vec{k}\right] \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{P,rel} = -\omega_2^2 R\vec{k}}$$

$$\vec{a}_{P,arr} = \vec{a}_O + \vec{\alpha}_{arr} \wedge (P - O) + \vec{\omega}_{arr} \wedge [\vec{\omega}_{arr} \wedge (P - O)]$$

$$\vec{a}_{P,a} = \vec{0} + \vec{0} + \omega_1 \vec{k} \wedge \left[\omega_1 \vec{k} \wedge (L\vec{j} + R\vec{k})\right] \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{P,a} = -\omega_1^2 L\vec{j}}$$

(0,5)

$$\vec{a}_{P,abs} = \vec{a}_{P,rel} + \vec{a}_{P,arr} + \vec{a}_{P,Cor}$$

$$\vec{a}_{P,Cor} = 2\vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{v}_{P,rel} = 2\omega_1 \vec{k} \wedge \left(-\omega_2 R\vec{j}\right) \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{P,Cor} = 2\omega_1 \omega_2 R\vec{i}}$$ (0,5)

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}_{P,abs} = 2\omega_1 \omega_2 R\vec{i} - \omega_1^2 L\vec{j} - \omega_2^2 R\vec{k}}$$

c)

$$\vec{\omega}_{D,abs} = \vec{\omega}_{D,rel} + \vec{\omega}_{D,arr} \Rightarrow \boxed{\vec{\omega}_{D,abs} = \omega_1 \vec{k} + \omega_2 \vec{i}}$$ (0,5)

$$\vec{\alpha}_{D,abs} = \vec{\alpha}_{D,rel} + \vec{\alpha}_{D,arr} + \vec{\omega}_{D,arr} \wedge \vec{\omega}_{D,rel} = \vec{0} + \vec{0} + \omega_1 \vec{k} \wedge \omega_2 \vec{i} \Rightarrow \boxed{\vec{\alpha}_{D,abs} = \omega_1 \omega_2 \vec{j}}$$ (0,5)