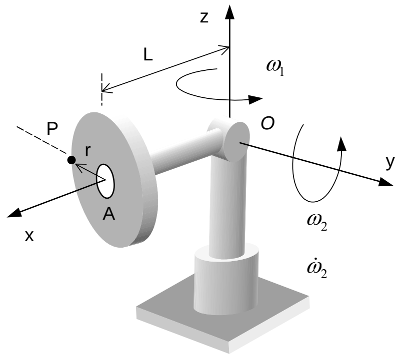
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2100 – MECÂNICA A – Segunda Prova – 11de outubro de 2011

Questão 1 (3,0 pontos)
A antena de radar, ilustrada na figura, gira com velocidade angular constante ω_1 em torno do eixo vertical. No instante considerado, o braço *OA* também está girando com velocidade angular ω_2 e aceleração angular $\dot{\omega}_2$ em torno do eixo *y*. O sistema de eixos *Oxyz* é solidário ao braço *OA*. Pedem-se, para a posição da figura:
a) o vetor de rotação absoluto da antena;
b) o vetor aceleração angular (rotacional) absoluto da antena;
c) o vetor velocidade absoluta do ponto *P* (*PA* é paralelo a *Oy*).



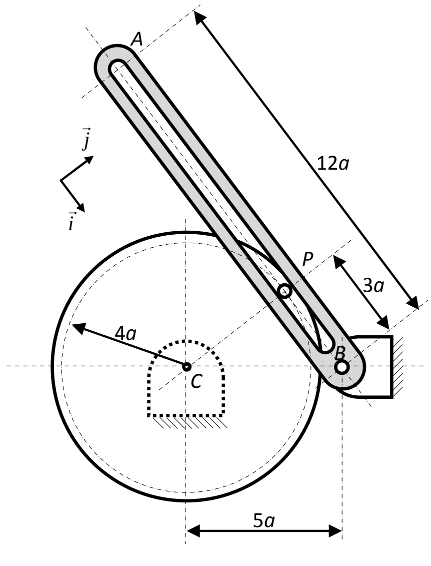
Solução:

a) $\boxed{\vec{\omega}_{abs} = \omega_2 \vec{j} + \omega_1 \vec{k}}$ (1,0)

b) $\vec{\alpha}_{abs} = \dot{\omega}_2 \vec{j} + \omega_1 \vec{k} \wedge \omega_2 \vec{j} \Rightarrow \boxed{\vec{\alpha}_{abs} = \dot{\omega}_2 \vec{j} - \omega_1 \omega_2 \vec{i}}$ (1,0)

c) $\vec{v}_{P,abs} = \vec{v}_O + \vec{\omega}_{abs} \wedge (P - O) \Rightarrow \vec{v}_{P,abs} = \left(\omega_2 \vec{j} + \omega_1 \vec{k}\right) \wedge \left(-r\vec{j} + L\vec{i}\right) \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{P,abs} = \omega_1 r \vec{i} + \omega_1 L \vec{j} - \omega_2 L \vec{k}}$ (1,0)

Questão 2 (3,5 pontos)
A figura mostra parte de um mecanismo de retorno rápido. A roda de centro *C* está articulada em *C*, que é um ponto fixo. A peça *AB* está articulada em *B*, que é um ponto fixo. O pino *P* está preso no disco a uma distância 4*a* do centro *C*, e percorre o rasgo da peça *AB*. O vetor de rotação do disco de centro *C* é $\vec{\omega} = -\omega \vec{k}$, com $\omega > 0$ constante, e seu eixo de rotação passa pelo ponto *C*. A direção do versor $\vec{i}$ é sempre paralela ao segmento *AB*. Considere a peça *AB* como sendo o referencial móvel. No instante mostrado na figura, determine:
a) As velocidades absoluta ($\vec{v}_{P,abs}$), relativa ($\vec{v}_{P,rel}$) e de arrastamento ($\vec{v}_{P,arr}$) do pino *P*, bem como o vetor de rotação $\vec{\omega}_{AB}$ da peça *AB*.
b) As acelerações absoluta ($\vec{a}_{P,abs}$), relativa ($\vec{a}_{P,rel}$), de arrastamento ($\vec{a}_{P,arr}$) e de Coriolis ($\vec{a}_{P,Cor}$) do pino *P*, bem como o vetor aceleração angular $\dot{\vec{\omega}}_{AB}$ da peça *AB*.



Solução:

a) O pino *P* pertence ao disco, logo: $\vec{v}_{P,abs} = \vec{v}_C + \vec{\omega} \wedge (P - C) = \vec{0} - \omega \vec{k} \wedge 4a\vec{j} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{P,abs} = 4a\omega \vec{i}}$ (0,5)

Temos também que: $\vec{v}_{P,abs} = \vec{v}_{P,rel} + \vec{v}_{P,arr} = \underbrace{v_{Pr}\vec{i}}_{\vec{v}_{P,rel}} + \underbrace{\vec{v}_B + \vec{\omega}_{AB} \wedge (P - B)}_{\vec{v}_{P,arr}}$ (0,5)

$\Rightarrow 4a\omega\vec{i} = v_{Pr}\vec{i} - 3a\omega_{AB}\vec{j} \Rightarrow \omega_{AB} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{\omega}_{AB} = \vec{0}}$ (0,5)

Conclui-se também que: $\boxed{\vec{v}_{P,rel} = 4a\omega\vec{i}}$ e $\boxed{\vec{v}_{P,arr} = \vec{0}}$ (0,5)

b) O pino P pertence ao disco, logo:

$$\vec{a}_{P,abs} = \vec{a}_C + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P-C) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P-C)] = \vec{0} + \vec{0} - \omega\vec{k} \wedge \omega 4a\vec{i} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_{P,abs} = -4a\omega^2\vec{j}} \quad (0,5)$$

Temos também que:

$$\vec{a}_{P,abs} = \vec{a}_{P,rel} + \vec{a}_{P,arr} + \vec{a}_{P,Cor} = \underbrace{a_{\mathrm{Pr}}\vec{i}}_{\vec{a}_{P,rel}} + \underbrace{\vec{a}_B + \dot{\vec{\omega}}_{AB} \wedge (P-B) + \vec{\omega}_{AB} \wedge [\vec{\omega}_{AB} \wedge (P-B)]}_{\vec{a}_{P,arr}} + \underbrace{2\vec{\omega}_{AB} \wedge \vec{v}_{P,rel}}_{\vec{a}_{P,Cor}}$$

Como $\vec{\omega}_{AB} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_{P,Cor} = \vec{0}}$

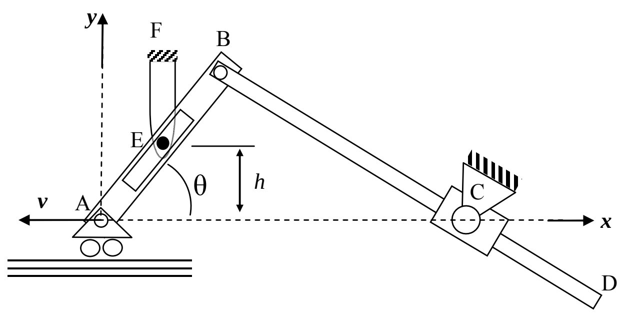
$$\Rightarrow -4a\omega^2\vec{j} = a_{\mathrm{Pr}}\vec{i} + \dot{\omega}_{AB}\vec{k} \wedge (-3a\vec{i}) + \vec{0} + \vec{0} = a_{\mathrm{Pr}}\vec{i} - 3a\dot{\omega}_{AB}\vec{j} \Rightarrow a_{\mathrm{Pr}} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{P,rel} = \vec{0}} \quad (0,5)$$

e

$$\Rightarrow \quad \dot{\omega}_{AB} = \frac{4}{3}\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{\vec{\omega}}_{AB} = \frac{4}{3}\omega^2\vec{k}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_{P,arr} = -4a\omega^2\vec{j}} \quad (0,5)$$

Questão 3 (3,5 pontos)

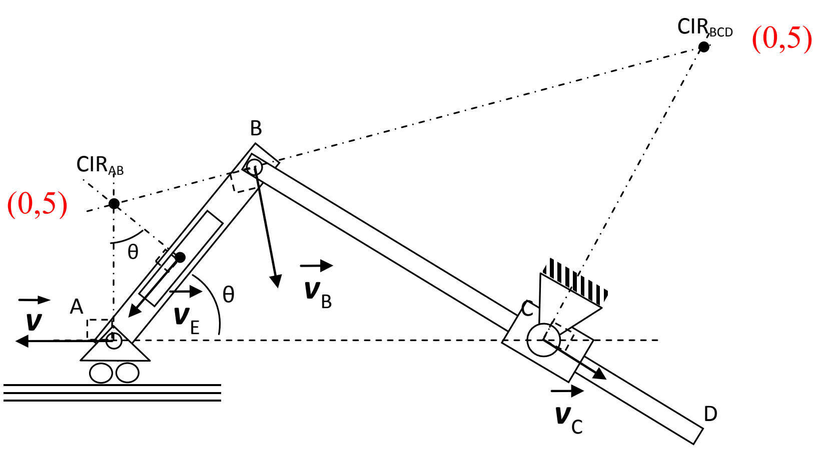
Duas barras rígidas, AB (de comprimento L) e BD, são unidas por uma articulação em B. A barra BD é livre para deslizar no interior da luva articulada em C. O pino E, pertencente à barra vertical EF fixa é permanentemente alojado no rasgo existente na barra AB. A distância entre o pino E e a horizontal é h (constante). O ângulo formado entre a barra AB e a direção horizontal é $\theta(t)$ e a extremidade A da barra AB possui velocidade de módulo $\boldsymbol{v}$ (constante) para a esquerda. Com base nestes dados, pedem-se:



a) desenhar o mecanismo na folha de respostas e determinar graficamente os CIR da barra AB e da barra BCD;
b) calcular as coordenadas do CIR da barra AB
c) calcular o vetor de rotação da barra AB;
d) calcular a velocidade do ponto B;
e) calcular o vetor aceleração angular (rotacional) da barra AB.

Solução:

a)



b) coordenadas do CIR de AB

$\boxed{x_{CAB} = 0;}$

$$\left.\begin{array}{l} y_{CAB} = \dfrac{\overline{EA}}{\text{sen}\,\theta} \\ \overline{EA} = \dfrac{h}{\text{sen}\,\theta} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{y_{CAB} = \frac{h}{\text{sen}^2\theta}}$$ (0,5)

c)

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{CAB} + \omega\,\vec{k} \wedge (A - CAB)$$

$$-v\vec{i} = \vec{0} + \omega\vec{k} \wedge \left(-\frac{h}{\text{sen}^2\theta}\vec{j}\right)$$

$$-v\vec{i} = \omega\frac{h}{\text{sen}^2\theta}\vec{i} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{\omega} = -\frac{v\text{sen}^2\theta}{h}\vec{k}}$$ (0,5)

d)

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (B - A)$$ (0,5)

$$\vec{v}_B = -v\vec{i} - \frac{v\text{sen}^2\theta}{h}\vec{k} \wedge L(\cos\theta\vec{i} + \text{sen}\,\theta\vec{j})$$

$$\vec{v}_B = -v\vec{i} + \frac{vL\text{sen}^3\theta}{h}\vec{i} - \frac{vL\text{sen}^2\theta\cos 0}{h}\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{v}_B = v\left[\left(\frac{L\text{sen}^3\theta}{h} - 1\right)\vec{i} - \frac{L\text{sen}^2\theta\cos 0}{h}\vec{j}\right]}$$ (0,5)

e) como a expressão para o vetor rotação é genérica, pode-se deriva-la em relação ao tempo para obter a expressão geral do vetor aceleração rotacional:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{v\text{sen}^2\theta}{h}\vec{k}\right) = -\frac{v}{h}2\text{sen}\,\theta\cos\theta.\dot{\theta}\,\vec{k}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{\omega}} = -\frac{v}{h}2\text{sen}\,\theta\cos\theta\left(-\frac{v\text{sen}^2\theta}{h}\right)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\vec{\omega}} = \left(\frac{v}{h}\right)^2 \text{sen}2\theta\,\text{sen}^2\theta\,\vec{k}}$$ (0,5)