ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

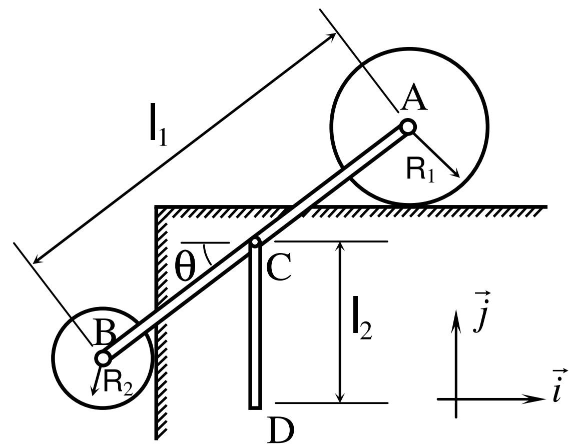
PME 2100 – MECÂNICA A – 2ª Prova – 21 de outubro de 2008

Duração da Prova: 110 minutos (não é permitido uso de calculadoras)

1ª Questão (3,5 pontos)

Os discos de raio R_1 e R_2 rolam sem escorregar e estão sempre em contato com a superfície mostrada na figura. A barra CD está articulada ao centro da barra AB, de forma que permanece sempre paralela ao versor $\vec{j}$. Sabendo que o vetor de rotação do disco com centro em A (de raio R_1) vale $\omega_1 \vec{k}$, constante, determine:

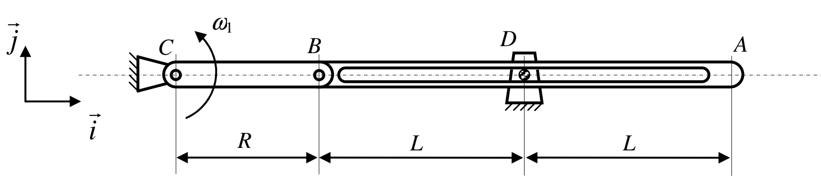
(a) A velocidade $\vec{v}_A$ do ponto A.
(b) O centro instantâneo de rotação da barra AB.
(c) O vetor de rotação $\vec{\omega}_{AB}$ da barra AB e o vetor de rotação $\vec{\omega}_2$ do disco com centro em B.
(d) A velocidade $\vec{v}_D$ do ponto D.



2ª Questão (3,0 pontos)

Considere o mecanismo mostrado na figura. A barra *BC* está articulada em *C*. A barra *AB* está articulada à barra *BC* no ponto *B* e possui um rasgo por onde pode deslizar sobre o pino fixo *D*. O vetor de rotação da barra *BC* é $\vec{\omega}_1 = \omega_1 \vec{k}$, com ω_1 constante. No instante mostrado na figura, determine:

(a) O CIR da barra *AB*, usando o método gráfico.
(b) O vetor de rotação $\vec{\omega}_2$ da barra *AB* e a velocidade $\vec{v}_A$ do ponto *A*.
(c) A aceleração $\vec{a}_B$ do ponto *B*.



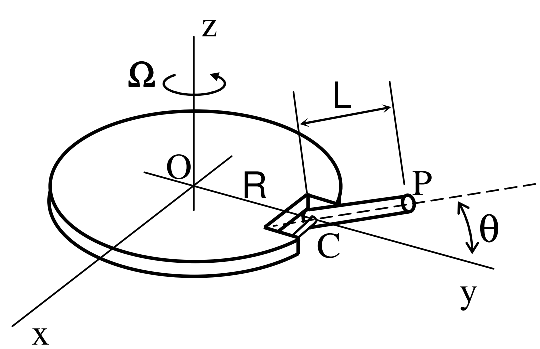
Em um instante posterior ao mostrado na figura, onde o vetor de rotação $\vec{\omega}_2$ da barra *AB* é nulo, determine:

(d) O ângulo φ formado entre o segmento *AB* e a horizontal. Desenhe o mecanismo nesta posição.

3ª Questão (3,5 pontos)

A barra CP está articulada em C ao disco com centro em O, como indicado na figura. No instante considerado, a barra gira com vetor de rotação constante $\vec{\omega} = \dot{\theta}\,\vec{i}$ e o disco gira com vetor de rotação constante $\vec{\Omega}$. A distância entre os pontos O e C vale *R*. Usando a base $\vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k}$, solidária ao disco, e considerando o disco como referencial móvel, determinar:

(a) O vetor de rotação absoluto e a aceleração angular da barra CP.
(b) As velocidades relativa, de arrastamento e absoluta do ponto P.
(c) As acelerações relativa, de arrastamento e absoluta do ponto P.



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

1ª Questão (3,5 pontos)

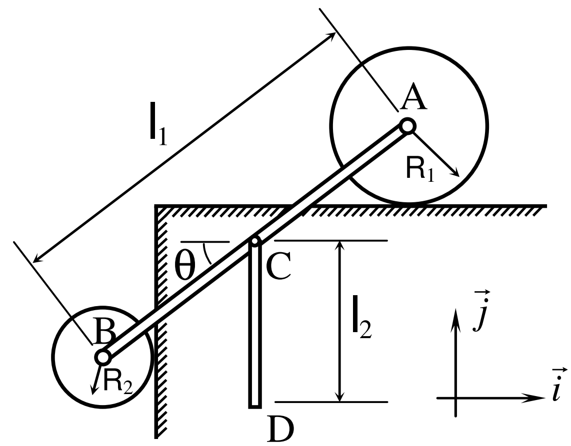
Os discos de raio R_1 e R_2 rolam sem escorregar e estão sempre em contato com a superfície mostrada na figura. A barra CD está articulada ao centro da barra AB, de forma que permanece sempre paralela ao versor $\vec{j}$. Sabendo que o vetor de rotação do disco com centro em A (de raio R_1) vale $\omega_1\vec{k}$, constante, determine:

(a) A velocidade $\vec{v}_A$ do ponto A.

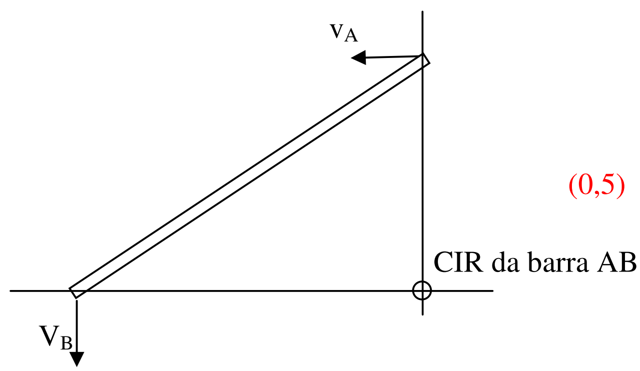
(b) O centro instantâneo de rotação da barra AB.

(c) O vetor de rotação $\vec{\omega}_{AB}$ da barra AB e o vetor de rotação $\vec{\omega}_2$ do disco com centro em B.

(d) A velocidade $\vec{v}_D$ do ponto D.



$\boxed{\vec{v}_A = -\omega_1 R_1 \vec{i}}$ (0,5)



(0,5)

$$\vec{v}_A = \vec{\omega}_{AB} \wedge (A - CIR_{AB}) = \omega_{AB}\vec{k} \wedge (L_1 \mathrm{sen}\theta \vec{j})$$

$$-\omega_1 R_1 \vec{i} = -\omega_{AB} L_1 \mathrm{sen}\theta \vec{i} \Rightarrow \omega_{AB} = \frac{\omega_1 R_1}{L_1 \mathrm{sen}\theta}$$

$$\boxed{\vec{\omega}_{AB} = \frac{\omega_1 R_1}{L_1 \mathrm{sen}\theta}\vec{k}}$$ (0,5)

$$\vec{v}_B = \vec{\omega}_{AB} \wedge (B - CIR_{AB}) = \omega_{AB}\vec{k} \wedge (-L_1 \cos\theta \vec{i}) \Rightarrow \boxed{\vec{v}_B = -\omega_1 R_1 \cot\theta \vec{j}}$$ (0,5)

$$\vec{v}_B = -\omega_2 R_2 \vec{j} \Rightarrow -\omega_2 R_2 \vec{j} = -\omega_1 R_1 \cot\theta \vec{j} \Rightarrow \omega_2 = \omega_1 \frac{R_1}{R_2}\cot\theta \Rightarrow \boxed{\vec{\omega}_2 = \omega_1 \frac{R_1}{R_2}\cot\theta \vec{k}}$$ (0,5)

Barra CD sempre vertical ➔ em translação ➔ $\vec{v}_D = \vec{v}_C$ (0,5)

$$\vec{v}_D = \vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{AB} \wedge (C - A) = -\omega_1 R_1 \vec{i} + \frac{\omega_1 R_1}{L_1 \mathrm{sen}\theta}\vec{k} \wedge \frac{L_1}{2}(-\cos\theta \vec{i} - \mathrm{sen}\theta \vec{j}) \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{v}_D = -\frac{\omega_1 R_1}{2}(\vec{i} + \cot\theta \vec{j})}$$ (0,5)

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

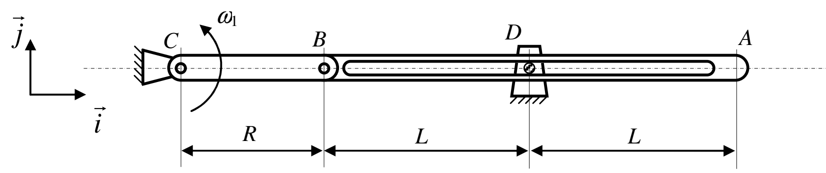
Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

2ª Questão (3,0 pontos)

Considere o mecanismo mostrado na figura. A barra *BC* está articulada em *C*. A barra *AB* está articulada à barra *BC* no ponto *B* e possui um rasgo por onde pode deslizar sobre o pino fixo *D*. O vetor de rotação da barra *BC* é $\vec{\omega}_1 = \omega_1 \vec{k}$, com ω_1 constante. No instante mostrado na figura, determine:

(a) O CIR da barra *AB*, usando o método gráfico.
(b) O vetor de rotação $\vec{\omega}_2$ da barra *AB* e a velocidade $\vec{v}_A$ do ponto *A*.
(c) A aceleração $\vec{a}_B$ do ponto *B*.



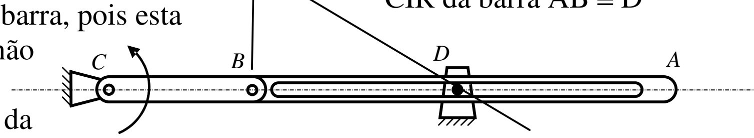
Em um instante posterior ao mostrado na figura, onde o vetor de rotação $\vec{\omega}_2$ da barra *AB* é nulo, determine:

(d) O ângulo φ formado entre o segmento *AB* e a horizontal. Desenhe o mecanismo nesta posição.

Como na posição indicada a velocidade de B é perpendicular à barra AB e a velocidade do ponto da barra que coincide com o pino deveria ter a direção da própria barra, pois esta desliza sobre o pino, a única condição que não viola a propriedade fundamental de corpo rígido da barra é que a velocidade do ponto da barra que coincide com o pino, na posição mostrada na figura, deve ser nula e assim este é CIR da barra.

(1,0)

CIR da barra AB ≡ D



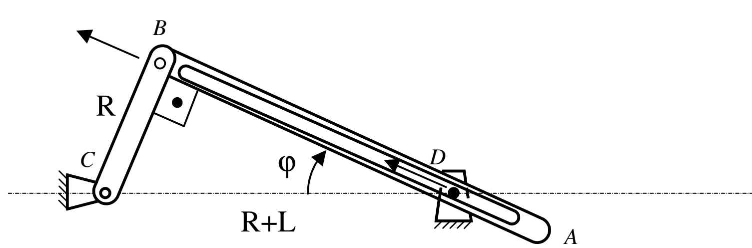
$$\vec{v}_B = \vec{\omega}_2 \wedge (B - D) \Rightarrow \omega_1 R\vec{j} = \omega_2 \vec{k} \wedge (-L\vec{i}) \Rightarrow \omega_2 = -\omega_1 \frac{R}{L} \Rightarrow \boxed{\vec{\omega}_2 = -\omega_1 \frac{R}{L}\vec{k}} \quad (0{,}5)$$

$$\vec{v}_A = \vec{\omega}_2 \wedge (A - D) = -\omega_1 \frac{R}{L}\vec{k} \wedge (L\vec{i}) \Rightarrow \boxed{\vec{v}_A = -\omega_1 R\vec{j}} \quad (0{,}5)$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_C + \dot{\vec{\omega}}_1 \wedge (B - C) + \omega_1^2 \vec{k} \wedge [\vec{k} \wedge (B - C)] = \vec{0} + \vec{0} + \omega_1^2 \vec{k} \wedge [\vec{k} \wedge R\vec{i}] \Rightarrow \boxed{\vec{a}_B = -\omega_1^2 R\vec{i}} \quad (0{,}5)$$

Quando $\vec{\omega}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_B = \vec{v}_D$. Sabendo conforme acima que $\vec{v}_B \perp \overline{CB}$ e que $\vec{v}_D \,//\, \overline{BA}$, graficamente:

$$\boxed{\varphi = \arcsen \frac{R}{R + L}} \quad (0{,}5)$$



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

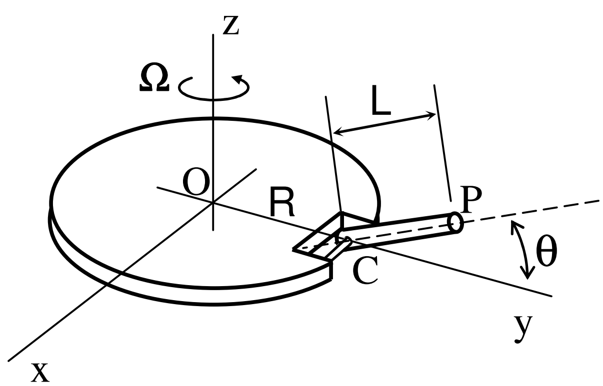
3ª Questão (3,5 pontos)

A barra CP está articulada em C ao disco com centro em O, como indicado na figura. No instante considerado, a barra gira com vetor de rotação constante $\vec{\omega} = \dot{\theta}\,\vec{i}$ e o disco gira com vetor de rotação constante $\vec{\Omega}$. A distância entre os pontos O e C vale R. Usando a base $\vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k}$, solidária ao disco, e considerando o disco como referencial móvel, determinar:

(a) O vetor de rotação absoluto e a aceleração angular da barra CP.

(b) As velocidades relativa, de arrastamento e absoluta do ponto P.

(c) As acelerações relativa, de arrastamento e absoluta do ponto P.



$$\vec{\omega}_{abs} = \vec{\omega}_{arr} + \vec{\omega}_{rel} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\omega}_{abs} = \Omega\vec{k} + \dot{\theta}\vec{i}}$$ (0,5)

$$\dot{\vec{\omega}}_{abs} = \dot{\vec{\omega}}_{arr} + \dot{\vec{\omega}}_{rel} + \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{\omega}_{rel} = \vec{0} + \vec{0} + \Omega\vec{k} \wedge \dot{\theta}\vec{i} \Rightarrow \boxed{\dot{\vec{\omega}}_{abs} = \Omega\dot{\theta}\vec{j}}$$ (0,5)

$$\vec{v}_{P,rel} = \vec{v}_{C,rel} + \vec{\omega}_{rel} \wedge (P - C) = \vec{0} + \dot{\theta}\vec{i} \wedge L(\cos\theta\vec{j} + \mathrm{sen}\theta\vec{k}) \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{P,rel} = \dot{\theta}L(-\mathrm{sen}\,\theta\vec{j} + \cos\theta\vec{k})}$$ (0,5)

$$\vec{v}_{P,arr} = \vec{v}_{O,arr} + \vec{\omega}_{arr} \wedge (P - O) = \vec{0} + \Omega\vec{k} \wedge \left[(R + L\cos\theta)\vec{j} + (L\mathrm{sen}\theta)\vec{k}\right] \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{P,arr} = -\Omega(R + L\cos\theta)\vec{i}}$$ (0,5)

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{P,arr} + \vec{v}_{P,rel} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}_P = -\Omega(R + L\cos\theta)\vec{i} + \dot{\theta}L(-\mathrm{sen}\theta\vec{j} + \cos\theta\vec{k})}$$

$$\vec{a}_{P,rel} = \vec{a}_{C,rel} + \dot{\vec{\omega}}_{rel} \wedge (P - C) + \vec{\omega}_{rel} \wedge [\vec{\omega}_{rel} \wedge (P - C)] \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{P,rel} = -\dot{\theta}^2 L(\cos\theta\vec{j} + \mathrm{sen}\theta\vec{k})}$$ (0,5)

$$\vec{a}_{P,arr} = \vec{a}_{O,rel} + \dot{\vec{\omega}}_{arr} \wedge (P - O) + \vec{\omega}_{arr} \wedge [\vec{\omega}_{arr} \wedge (P - O)] \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{P,arr} = -\Omega^2(R + L\cos\theta)\vec{j}}$$ (0,5)

$$\vec{a}_{P,cor} = 2\vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{v}_{P,rel} = 2\Omega\vec{k} \wedge \dot{\theta}L(-\mathrm{sen}\theta\vec{j} + \cos\theta\vec{k}) \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{P,cor} = 2\Omega\dot{\theta}L\mathrm{sen}\theta\vec{i}}$$ (0,5)

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{P,arr} + \vec{a}_{P,rel} + \vec{a}_{P,cor} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_P = 2\Omega\dot{\theta}L\mathrm{sen}\theta\vec{i} - \left(\Omega^2(R + L\cos\theta) + \dot{\theta}^2 L\cos\theta\right)\vec{j} - \dot{\theta}^2 L\mathrm{sen}\theta\vec{k}}$$