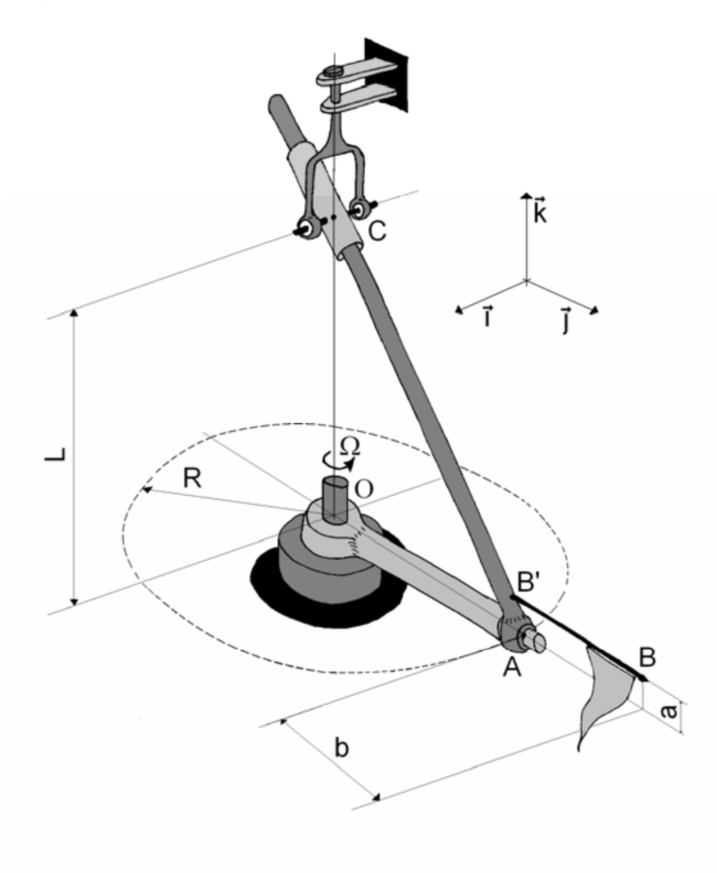
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2100 – Mecânica A – Segunda Prova – 23 de outubro de 2007

1ª Questão: (3,5 Ptos) A barra *OA* com vetor de rotação constante $\vec{\Omega} = \Omega\vec{k}$ gira no plano horizontal $O\vec{i}\vec{j}$ em torno de *O*. A barra inclinada *AC* pode deslizar em uma luva articulada em *C* e é conectada à barra horizontal *AO* através de um pino horizontal em *A*. A luva *C* tem liberdade de girar em torno do eixo vertical e do eixo horizontal $C\vec{i}$ devido à forquilha vertical, conforme mostrado na figura. A distância *OC* vale **L** e a distância *OA* vale **R**. Acima do ponto A da barra *AC* existe uma bandeira horizontal *BB'* que gira solidária à barra inclinada *AC*. O ponto *B* do extremo da bandeira encontra-se a uma distância **a** acima do plano de movimento da barra horizontal *OA* e a uma distância radial **b** do ponto *A*. Considere os versores $\vec{i}, \vec{i}, \vec{k}$ solidários à barra *OA*.



Pede-se determinar:
a) O vetor velocidade dos pontos A, B e C;
b) A vetor velocidade angular $\vec{\omega}$ e o vetor aceleração angular $\dot{\vec{\omega}}$ da barra inclinada AC;
c) O vetor aceleração dos pontos A e B.

Solução:

a) Ponto A pertence à barra AO -> movimento circular uniforme em torno de O:
$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{\Omega} \wedge (A - O) = -\Omega R\vec{i}$ (0,5 pontos)
Como não há rotação relativa em torno de A devido à luva C -> Ponto B também realiza movimento circular uniforme em torno do eixo $O\vec{k}$:
$\vec{v}_B = \vec{v}_O + \vec{\Omega} \wedge (B - O) = -\Omega(R + b)\vec{i}$ (0,5 pontos)
Como o ponto A não se movimenta na direção vertical, o ponto C da barra AC é fixo:
$\vec{v}_C = \vec{0}$
De fato:

Av. Prof. Mello Moraes, 2231 – 05508-900 – São Paulo – SP – BRASIL
TEL.: 55 11 3091-5355/5561/5570 – FAX: 55 11 3813 1886

$\vec{v}_A \cdot (A - C) = \vec{v}_C \cdot (A - C) = (-\Omega R\,\vec{i}) \cdot (R\,\vec{j} - L\,\vec{k}) = \vec{v}_C \cdot [(R + b)\,\vec{j} - L\,\vec{k}] = 0 \Rightarrow \vec{v}_c \,//\, \vec{i} \;\therefore\; \vec{v}_c = \vec{0}$
(0,5 pontos)

b) Pontos A, B e C pertencem ao mesmo sólido com vetor de rotação:
$\vec{\omega} = \omega_x\,\vec{i} + \omega_y\,\vec{j} + \omega_z\,\vec{k}$ assim:
$\vec{v}_A = \vec{v}_C + \vec{\omega} \wedge (A - C) = -\Omega R\,\vec{i}$
$\vec{v}_B = \vec{v}_C + \vec{\omega} \wedge (B - C) = -\Omega (R + b)\vec{i}$

Ou seja:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 0 & R & -L \end{vmatrix} = (-\omega_y L - \omega_z R)\vec{i} + \omega_x L\,\vec{j} + \omega_x R\,\vec{k} = -\Omega R\,\vec{i} \Rightarrow \omega_x = 0$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \omega_y & \omega_z \\ 0 & (R + b) & -(L - a) \end{vmatrix} = [(-\omega_y (L - a) - \omega_z (R + b))]\vec{i} = -\Omega (R + b)\vec{i}$$

Logo: $\begin{cases} \omega_y \dfrac{L}{R} + \omega_z = \Omega \\ \omega_y \dfrac{L - a}{R + b} + \omega_z = \Omega \end{cases} \Rightarrow \omega_y \left(\dfrac{L}{R} - \dfrac{L - a}{R + b} \right) = 0 \Rightarrow \omega_y = 0$

Pois: $\dfrac{L}{R} \neq \dfrac{L - a}{R + b}$ dado que os triângulos OAC e OBC não são semelhantes. (0,5 pontos)

Portanto: $\vec{\omega}(t) = \Omega\,\vec{k} = \vec{\Omega} \Rightarrow \dfrac{d}{dt}\vec{\omega} = \vec{0}$ (0,5 pontos)

c) Pontos A e B realizam movimento circular uniforme:

$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (A - O) + \vec{\omega} \wedge (\vec{v}_A - \vec{v}_O) = -R\Omega^2\,\vec{j}$ (aceleração centrípeta) (0,5 pontos)

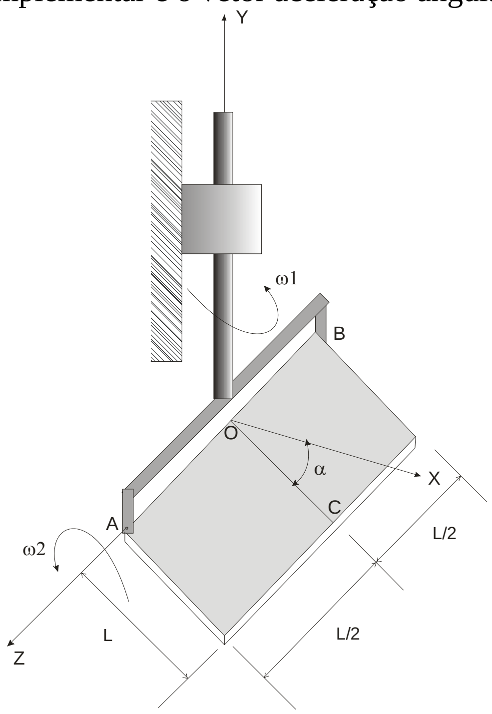
$\vec{a}_B = \vec{a}_C + \dot{\vec{\omega}} \wedge (A - C) + \vec{\omega} \wedge (\vec{v}_A - \vec{v}_C) = -(R + b)\Omega^2\,\vec{j}$ (aceleração centrípeta) (0,5 pontos)

Obs.: como o triângulo AOC não muda de forma, o movimento do conjunto é de um sólido girando em torno do eixo vertical $O\vec{k}$, sem movimento relativo entre as peças, portanto de um sólido girando com um eixo fixo $O\vec{k}$.

Av. Prof. Mello Moraes, 2231 – 05508-900 – São Paulo – SP – BRASIL
TEL.: 55 11 3091-5355/5561/5570 – FAX: 55 11 3813 1886

2ª. Questão (3,5 Ptos). Uma placa quadrada, de lado L, está articulada nos pontos A e B de um grampo em forma de U. A placa gira a uma velocidade angular constante $\vec{\omega}_2 = \omega_2 \vec{k}$ em relação ao grampo, que, por sua vez, gira a uma velocidade angular $\vec{\omega}_1 = \omega_1 \vec{j}$ em torno do eixo Y. Para a posição mostrada, onde a placa está inclinada de α=45º em relação ao plano XZ, pede-se:

a) o vetor velocidade relativa, o vetor velocidade de arrastamento e o vetor velocidade absoluto do ponto C;
b) o vetor aceleração relativa, o vetor aceleração de arrastamento e o vetor aceleração de Corilis e o vetor aceleração absoluta do ponto C;
c) o vetor velocidade angular relativa, o vetor velocidade angular de arrastamento e o vetor velocidade angular absoluta da placa;
d) o vetor aceleração angular relativa, o vetor aceleração angular de arrastamento, o vetor aceleração angular complementar e o vetor aceleração angular absoluto da placa.



a) $\vec{V}_{C,rel} = \omega_2 \vec{k} \wedge L\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} - \vec{j}) = \omega_2 L \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})$

$\vec{V}_{C,ar} = \omega_1 \vec{j} \wedge L\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} - \vec{j}) = \omega_1 L \frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{k})$

$\vec{V}_{C,abs} = \vec{V}_{C,ar} + \vec{V}_{C,rel} = \omega_2 L \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j}) + \omega_1 L \frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{k})$ (1,0 ponto)

b) $\vec{a}_{C,rel} = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}}_2 \wedge (C - 0) + \vec{\omega}_2 \wedge (\vec{\omega}_2 \wedge (C - O)) = \omega_2^2 L \frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{i} + \vec{j})$ (1,5 pontos)

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\vec{a}_{C,ar} = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}}_1 \wedge (C-0) + \vec{\omega}_1 \wedge (\vec{\omega}_1 \wedge (C-O)) = \omega_1^2 L \frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{i}\,)$$

$$\vec{a}_{C,Cor} = -\sqrt{2}\omega_1\omega_2 L\vec{k}$$

$$\vec{a}_{C,Abs} = \vec{a}_{C,rel} + \vec{a}_{C,ar} + \vec{a}_{C,Cor} = -(\omega_2^2 + \omega_1^2)L\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \omega_2^2 L\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} - \sqrt{2}\omega_1\omega_2 L\vec{k}$$

c) $\vec{\Omega}_{Abs} = \vec{\Omega}_{rel} + \vec{\Omega}_{ar} = \vec{\omega}_2\vec{k} + \vec{\omega}_1\vec{j}$ (0,5 pontos)

d) $\vec{\alpha}_{abs} = \vec{\alpha}_{rel} + \vec{\alpha}_{arr} + \vec{\alpha}_{comp} = 0 + 0 + \omega_1\omega_2\vec{i}$ (0,5 pontos)

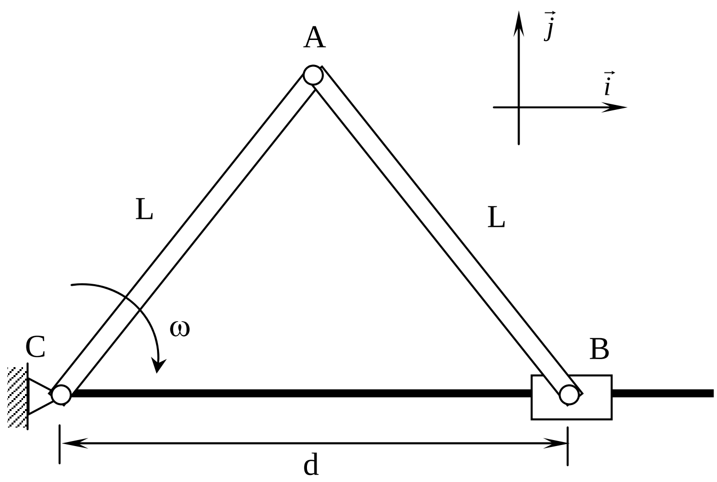
Av. Prof. Mello Moraes, 2231 – 05508-900 – São Paulo – SP – BRASIL
TEL.: 55 11 3091-5355/5561/5570 – FAX: 55 11 3813 1886

3a Questão (3,0 pontos): A extremidade B da barra AB escorrega sobre o eixo fixo CB. A barra AB está articulada em A à barra AC que gira com velocidade angular constante ω ao redor de C que é fixo. As barras AB e AC possuem o mesmo comprimento L. Considere a posição onde a distância BC é d= $L\sqrt{2}$.

a) Indicar graficamente o centro instantâneo de rotação da barra AB.

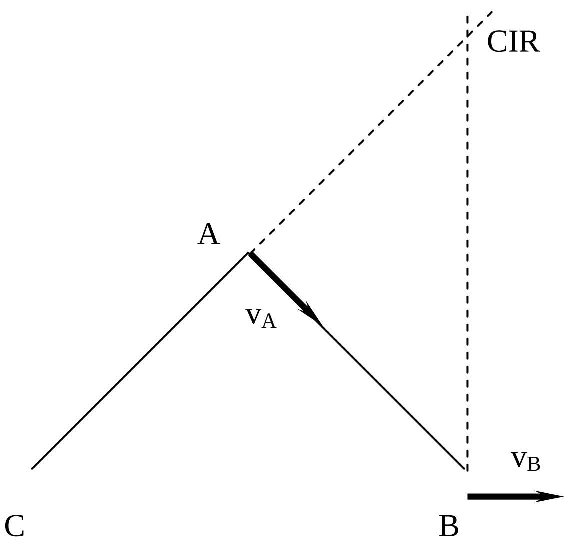
b) Determinar a velocidade angular da barra AB.

c) Determinar a aceleração do ponto A.



Resposta:

Item A) (1,0 pontos)



Item B (1,0 pontos)

Calculando a velocidade do ponto A:

$$\vec{v}_A = -\omega\vec{k} \wedge L\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right)$$

(0,5 pontos)

$$\vec{v}_A = \omega L\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \omega L\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$$

Para a barra AB:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{AB} \wedge (A - B)$$

$$\omega L\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \omega L\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{AB} \wedge \left(L\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} - L\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}\right)$$

Resolvendo a equação vetorial:

$\omega_{AB} = \omega \Rightarrow \vec{\omega}_{AB} = \omega\vec{k}$ (0,5 pontos)

Item C (1,0 pontos)

Dada a expressão da velocidade, a aceleração da barra AB será:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_C + \dot{\vec{\omega}} \wedge (A - C) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (A - C))$$

$$\vec{a}_{ABS} = \vec{0} + \vec{0} + \omega\vec{k} \wedge \left[\omega\vec{k} \wedge \left(\frac{L\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{L\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right)\right]$$

$$\vec{a}_{ABS} = -\omega^2 L\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec{i} + \vec{j}\right)$$