ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2100 – MECÂNICA A – Segunda Prova – 27 de outubro de 2006

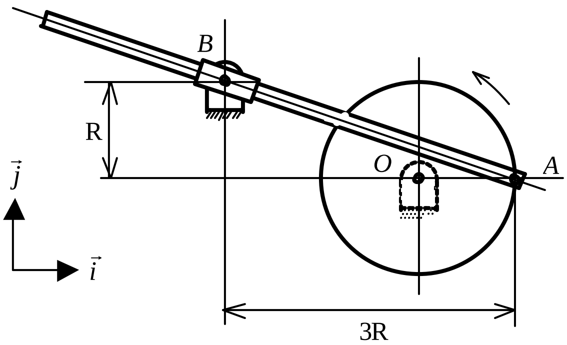
Duração da Prova: 100 minutos (não é permitido o uso de calculadoras)

1ª Questão (3,0 pontos) O disco de raio R gira em torno de seu centro fixo O, com velocidade angular w constante. A barra está articulada ao disco em A. No ponto B existe um cursor pivotado que envolve a barra. Para o instante representado na figura:

a) determine, graficamente, o centro instantâneo de rotação da barra;

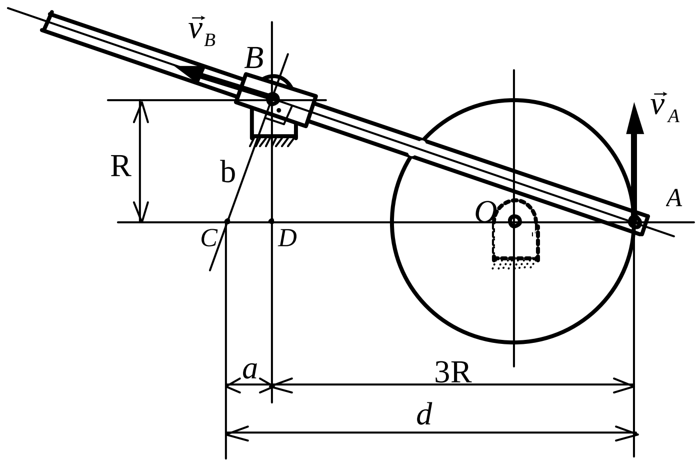
b) calcule a velocidade e a aceleração vetoriais do ponto A;

c) determine o vetor de rotação $\vec{\Omega}$ da barra.



Solução:

a) Notar que, devido ao cursor, a velocidade do ponto da barra em B é na direção do eixo da barra. Considerando a direção da velocidade do ponto A, observa-se que o ponto C é o CIR da barra. (1,0)



b) Cálculo da velocidade do ponto A:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{w} \wedge (A - O) \Rightarrow \vec{v}_A = \vec{0} + w\vec{k} \wedge R\vec{i} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_A = wR\vec{j}} \quad (0,5)$$

Cálculo da aceleração do ponto A:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \dot{\vec{w}} \wedge (A - O) + \vec{w} \wedge (\vec{w} \wedge (A - O)) \Rightarrow \vec{a}_A = \vec{0} + \vec{0} \wedge R\vec{i} + w\vec{k} \wedge (w\vec{k} \wedge R\vec{i})$$

$$\boxed{\vec{a}_A = -w^2 R\vec{i}} \quad (0,5)$$

c) O ponto A também pertence à barra, e usando o CIR temos:

$v_A = \Omega d = wR$, onde $d = a + 3R$

Pela semelhança entre os triângulos ABD e BCD, temos que $\frac{a}{R} = \frac{R}{3R} \Rightarrow a = \frac{R}{3}$, logo:

$$\Omega\left(\frac{R}{3} + 3R\right) = wR \Rightarrow \Omega = \frac{3}{10}w, \text{ e, observando a figura, } \boxed{\vec{\Omega} = \frac{3}{10}w\vec{k}} \quad (1,0)$$

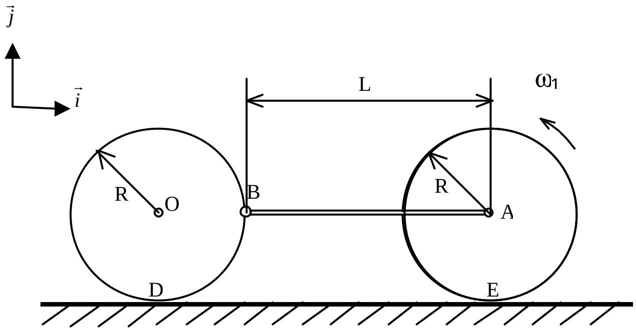
2ª Questão (3,0 pontos) Dois discos de raio R rolam sem escorregar. A velocidade angular w_1 do disco de centro A é conhecida e constante. Sabendo que a barra AB tem comprimento L, para o instante representado na figura:

a) calcule a velocidade do ponto A;

b) determine graficamente o CIR da barra AB;

c) calcule o vetor de rotação $\vec{w}_{AB}$ da barra AB;

d) calcule o vetor de rotação $\vec{w}_2$ do disco de centro O;

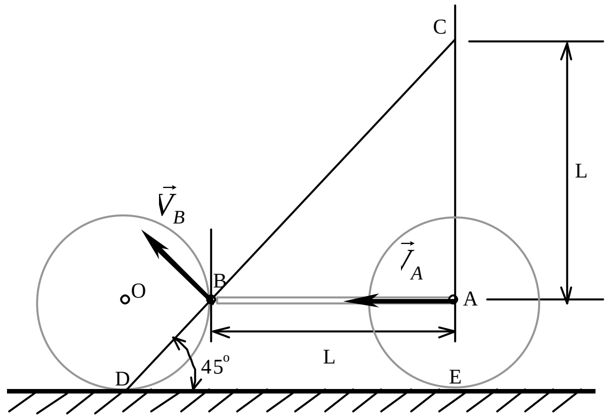


Solução:

a) Cálculo da velocidade do ponto *A*:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_E + \vec{w}_1 \wedge (A - E) \Rightarrow \vec{v}_A = \vec{0} + w_1 \vec{k} \wedge R\,\vec{j} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_A = -w_1 R\,\vec{i}}$$ (0,5)

b) Notar que os pontos *A* e *B* pertencem aos discos com centro em A e O, respectivamente. Sendo assim, a velocidade desses pontos deve ser como indicado na figura, já que os discos rolam sem escorregar. Traçando as perpendiculares às velocidades dos pontos *A* e *B*, observa-se que o ponto *C* é o CIR da barra. (0,5)



c) Para a barra:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_C + \vec{w}_{AB} \wedge (A - C) \text{ , onde } \vec{v}_C = \vec{0} \text{ e } (A - C) = -L\vec{j}$$

$$\Rightarrow -w_1 R\vec{i} = w_{AB} L\vec{i} \Rightarrow \boxed{\vec{w}_{AB} = \frac{-w_1 R}{L}\vec{k}}$$ (1,0)

d) Para a barra:

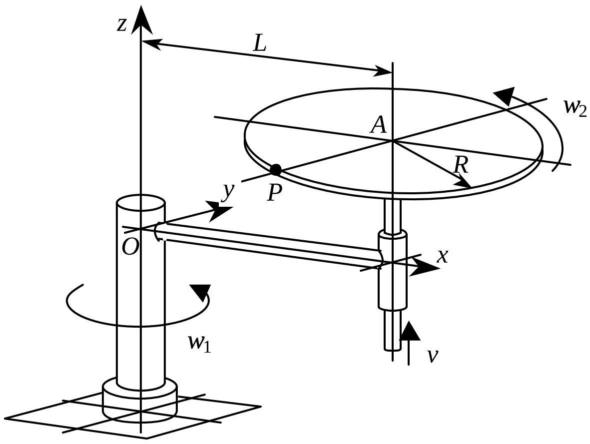
$$\vec{v}_B = \vec{v}_C + \vec{w}_{AB} \wedge (B - C) \text{ , onde } (B - C) = -L\vec{j} - L\vec{i} \Rightarrow \vec{v}_B = -w_1 R\vec{i} + w_1 R\vec{j}$$ (0,5)

Para o disco com centro em O:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_D + \vec{w}_2 \wedge (B - D) \text{ , onde } \vec{v}_D = \vec{0} \text{ e } (B - D) = R\vec{i} + R\vec{j}$$

$$\Rightarrow -w_1 R\,\vec{i} + w_1 R\,\vec{j} = -w_2 R\,\vec{i} + w_2 R\,\vec{j} \Rightarrow w_2 = w_1 \Rightarrow \boxed{\vec{w}_2 = w_1\vec{k}}$$ (0,5)

3ª Questão (4,0 pontos) No mecanismo mostrado na figura, o ponto O é fixo, e a barra OD, de comprimento L, possui vetor de rotação $\vec{w}_1 = w_1\vec{k}$ (constante) em relação a um referencial fixo. O disco de centro A e raio R possui vetor de rotação $\vec{w}_2 = w_2\vec{k}$ e vetor aceleração angular $\vec{a}_2 = a_2\vec{k}$ em relação à barra OD. O ponto A possui velocidade $\vec{v} = v\vec{k}$ (constante) em relação à barra OD. O sistema de coordenadas Oxyz é fixo na barra OD e o vetor $(P-A)$ é paralelo ao eixo Oy. Considerando a barra OD como referencial móvel, determine, para o instante da figura,



a) as velocidades relativa, de arrastamento e absoluta do ponto P;
b) as acelerações relativa, de arrastamento e absoluta do ponto P;
c) o vetor de rotação absoluto e o vetor aceleração angular absoluto do disco de centro A.

Solução:

a) Velocidade relativa do ponto P: $\vec{v}_{P_{rel}} = \vec{v}_{A_{rel}} + \vec{w}_2 \wedge (P-A)$, onde $\vec{v}_{A_{rel}} = v\vec{k}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{v}_{P_{rel}} = w_2 R\vec{i} + v\vec{k}}$ (0,5)

Velocidade de arrastamento do ponto P:

Definindo $(A-D) = z\vec{k}$, e observando que $z\vec{k} \,//\, \vec{w}_1$,

$\vec{v}_{P_{Arr}} = \vec{v}_{O_{Arr}} + \vec{w}_1 \wedge (P-O)$, onde $\vec{v}_{O_{Arr}} = \vec{0}$ e $(P-O) = L\vec{i} - R\vec{j} + z\vec{k} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{P_{Arr}} = w_1 R\vec{i} + w_1 L\vec{j}}$ (0,5)

Velocidade absoluta do ponto P: $\vec{v}_{P_{Abs}} = \vec{v}_{P_{Arr}} + \vec{v}_{P_{rel}} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{P_{Abs}} = (w_1 + w_2)R\vec{i} + w_1 L\vec{j} + v\vec{k}}$ (0,5)

b) Aceleração relativa do ponto P: $\vec{a}_{P_{rel}} = \vec{a}_{A_{rel}} + \dot{\vec{w}}_2 \wedge (P-A) + \vec{w}_2 \wedge (\vec{w}_2 \wedge (P-A))$,

onde $\vec{a}_{A_{rel}} = \vec{0}$ e $\dot{\vec{w}}_2 = a_2\vec{k} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{P_{rel}} = a_2 R\vec{i} + w_2^2 R\vec{j}}$ (0,5)

Aceleração de arrastamento do ponto P:

$\vec{a}_{P_{Arr}} = \vec{a}_{O_{Arr}} + \dot{\vec{w}}_1 \wedge (P-O) + \vec{w}_1 \wedge (\vec{w}_1 \wedge (P-O))$, onde $\vec{a}_{O_{Arr}} = \vec{0}$ e $\dot{\vec{w}}_1 = \vec{0}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{a}_{P_{Arr}} = -w_1^2 L\vec{i} + w_1^2 R\vec{j}}$ (0,5)

Aceleração absoluta do ponto P:

$\vec{a}_{P_{Abs}} = \vec{a}_{P_{Arr}} + \vec{a}_{P_{rel}} + \vec{a}_{P_{Cor}}$, onde $\vec{a}_{P_{Cor}} = 2\vec{w}_{Arr} \wedge \vec{V}_{P_{rel}} = 2w_1\vec{k} \wedge (w_2 R\vec{i} + v\vec{k}) = 2w_1 w_2 R\vec{j}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{a}_{P_{Abs}} = (a_2 R - w_1^2 L)\vec{i} + (w_1^2 R + w_2^2 R + 2w_1 w_2 R)\vec{j}}$ (0,5)

c) Vetor de rotação absoluto do disco com centro em A:

$\vec{w}_{Abs} = \vec{w}_{rel} + \vec{w}_{Arr} \Rightarrow \boxed{\vec{w}_{Abs} = (w_1 + w_2)\vec{k}}$ (0,5)

Vetor aceleração angular absoluto do disco com centro em A:

$\dot{\vec{w}}_{Abs} = \dot{\vec{w}}_{rel} + \dot{\vec{w}}_{Arr} + \vec{w}_R$, onde $\vec{w}_R = \vec{w}_{Arr} \wedge \vec{w}_{rel} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\dot{\vec{w}}_{Abs} = \dot{\vec{w}}_{rel} = a_2\vec{k}}$ (0,5)