PME2100 Gabarito da 2^a Prova 29/10/2004

Departamento de Engenharia Mecânica - PME *Escola Politécnica da USP*

1 Questão (3,0 pontos)

Uma força F é aplicada na peça em forma de U. Esta peça pode deslizar ao longo da guia. No ponto de contato em A o coeficiente de atrito é nulo, e no ponto de contato em B o coeficiente de atrito é μ.

a) Desenhe o diagrama de corpo livre da peça em forma de U.

b) Em função de a, F e μ, determine o intervalo dos valores de b compatível com o equilíbrio.

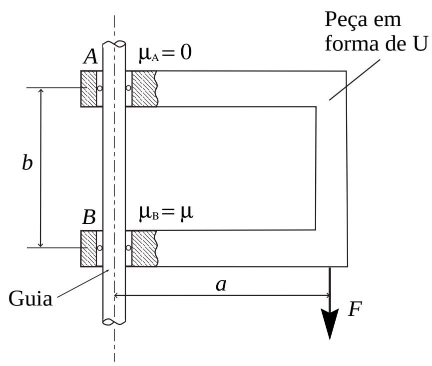

Figura 1: Peça em forma de U

1.1 Solução

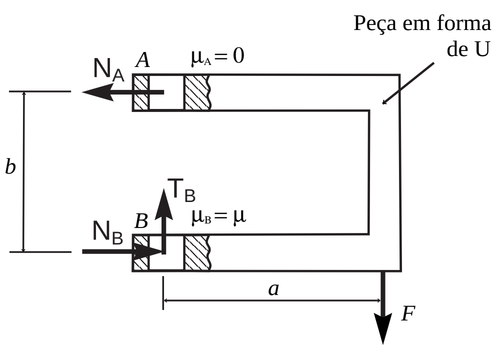

Figura 2: Diagrama de Corpo Livre (1,0)

Equações do equilíbrio da peça em forma de U: (1,0)

$$\begin{aligned} \text{vertical:} \quad & T_B = F \\ \text{horizontal:} \quad & N_A = N_B \\ \text{momento com polo B:} \quad & N_A \cdot b = F \cdot a \quad \Rightarrow \quad N_A = N_B = \frac{a}{b} F \end{aligned}$$

Atrito sem escorregamento:

$$T_B \le \mu \, N_B \quad (0{,}5) \quad \Rightarrow \quad F \le \mu \frac{a}{b} F \quad \Rightarrow \quad \boxed{b \le \mu \, a} \quad (0{,}5)$$

2 Questão (3,5 pontos)

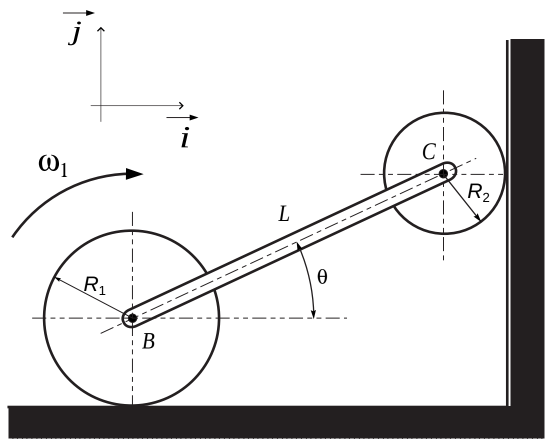

Figura 3: Sistema composto de uma barra AB e dois discos

Os discos de raios R_1 e R_2 rolam sem escorregar e o disco de raio R_2 está sempre em contato com a parede. É conhecida a velocidade angular ω_1 (constante) do disco de raio R_1. Em função de ω_1, θ, L, R_1 e R_2, calcule:

a) A velocidade $\vec{v}_B$ do ponto B.

b) A velocidade angular ω_{BC} da barra BC e a velocidade $\vec{v}_C$ do ponto C.

c) A velocidade angular ω_2 e a aceleração angular $\dot{\omega}_2$ do disco de raio R_2.

d) As acelerações $\vec{a}_C$ do ponto C e $\vec{a}_{CIR}$ do CIR do disco de raio R_2.

2.1 Solução

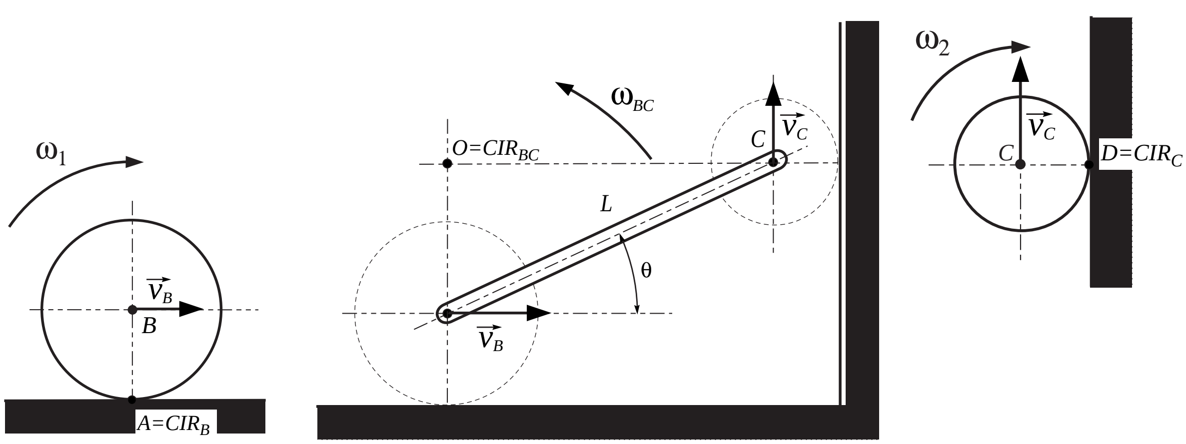

Figura 4: Movimento dos três sólidos

a) Disco B

$$\vec{v}_B = \underbrace{\vec{v}_A}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{\omega}_1}_{-\omega_1 \vec{k}} \wedge \underbrace{(B-A)}_{R_1 \vec{j}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}_B = \omega_1 R_1 \vec{i}} \qquad (0{,}5)$$

b) Barra AB

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{BC} \wedge (C - B) \quad \Rightarrow \quad v_C\vec{j} = \omega_1 R_1 \vec{i} + \omega_{BC}\vec{k} \wedge L\left(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}\right)$$

$$\begin{cases} 0 = \omega_1 R_1 - \omega_{BC} L \sin\theta \\ v_C = \omega_{BC} L \cos\theta \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_{BC} = \frac{\omega_1 R_1}{L\sin\theta}} \quad (0{,}5)$$

$$\boxed{v_C = \frac{\omega_1 R_1 \cos\theta}{\sin\theta}} \quad (0,5)$$

c) Disco C

$$\vec{v}_C = \underbrace{\vec{v}_D}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{\omega}_2}_{-\omega_2\vec{k}} \wedge \underbrace{(C - D)}_{-R_2\vec{i}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_2 = \frac{\omega_1\, R_1\ \cos\theta}{R_2\sin\theta}} \quad (0{,}5)$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{-\omega_1 R_1 \dot{\theta}}{R_2\sin^2\theta}$$

como

$$\dot{\theta} = \omega_{BC} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{\omega}_2 = \frac{-\omega_1^2 R_1^2}{R_2 L \sin^3\theta}} \quad (0{,}5)$$

d) Disco C

$$\boxed{\vec{a}_C = \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \frac{-\omega_1^2 R_1^2}{L\sin^3\theta}\vec{j}} \quad (0{,}5)$$

e

$$\vec{a}_D = \vec{a}_C + \dot{\vec{\omega}}_2 \wedge (D - C) + \vec{\omega}_2 \wedge [\vec{\omega}_2 \wedge (D - C)]$$

$$\vec{a}_D = \frac{-\omega_1^2 R_1^2}{L\sin^3\theta}\vec{j} + \frac{\omega_1^2 R_1^2}{R_2 L \sin^3\theta}\vec{k} \wedge R_2\vec{i} + \frac{\omega_1\, R_1\ \cos\theta}{R_2\sin\theta}\vec{k} \wedge \left[\frac{\omega_1\, R_1\ \cos\theta}{R_2\sin\theta}\vec{k} \wedge R_2\vec{i}\right]$$

$$\boxed{\vec{a}_D = -\frac{\omega_1^2 R_1^2 \cos^2\theta}{R_2\sin^2\theta}\vec{i}} \quad (0{,}5)$$

3 Questão (3,5 pontos)

A placa $ABCD$ pode girar em torno do eixo Ox, e sua velocidade angular em relação ao garfo é ω_2 (constante). O garfo (referencial móvel) gira em torno do eixo Oz com velocidade angular ω_1 (constante) em relação ao solo (referencial fixo). No instante em que a placa $ABCD$ está na vertical, conforme mostra a figura, determine, em função de ω_1, ω_2, a e b, e na base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ que orienta o sistema de coordenadas $Oxyz$ (solidária ao garfo):

a) As velocidades relativa $\vec{v}_{A,rel}$, de arrastamento $\vec{v}_{A,arr}$ e absoluta $\vec{v}_{A,abs}$ do ponto A.

b) As acelerações relativa $\vec{a}_{A,rel}$, de Coriolis $\vec{a}_{A,cor}$ e absoluta $\vec{a}_{A,abs}$ do ponto A.

c) O vetor velocidade angular absoluta $\vec{\omega}_{abs}$ da placa $ABCD$, e seu vetor aceleração angular absoluta $\dot{\vec{\omega}}_{abs}$.

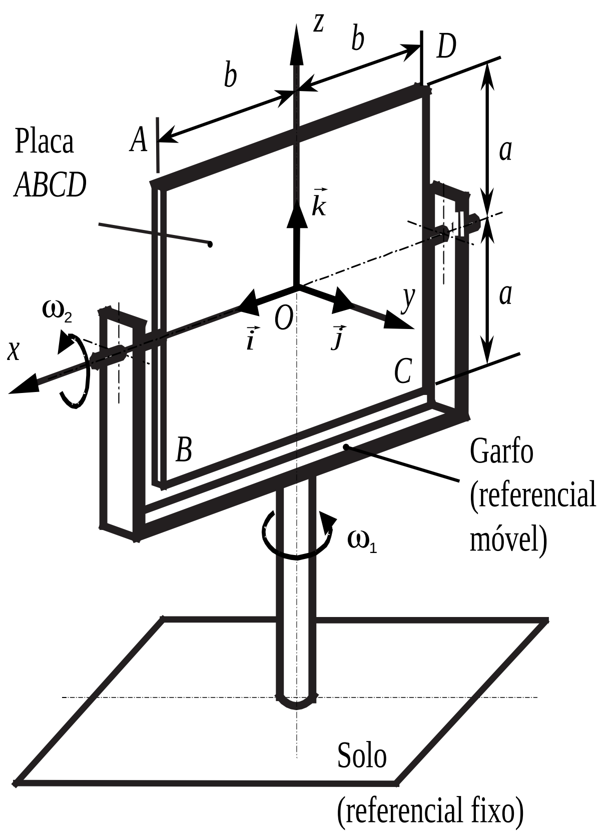

Figura 5: Composição de movimentos de rotação

3.1 Solução

a) Item (a):

$$\vec{v}_{A,rel} = \vec{v}_{0,rel} + \vec{\omega}_2 \wedge (A-O) = \vec{0} + \omega_2\vec{i} \wedge \left(b\vec{i} + a\vec{k}\right) = -\omega_2 a\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}_{A,rel} = -\omega_2 a\vec{j}} \quad (0,4)$$

$$\vec{v}_{A,arr} = \vec{v}_{0,arr} + \vec{\omega}_1 \wedge (A - O) = \vec{0} + \omega_1 \vec{k} \wedge \left(b\vec{i} + a\vec{k}\right) = \omega_1 b\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}_{A,arr} = \omega_1 b\vec{j}} \quad \color{red}{(0{,}4)}$$

$$\vec{v}_{A,abs} = \vec{v}_{A,rel} + \vec{v}_{A,arr} = -\omega_2 a\vec{j} + \omega_1 b\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}_{A,abs} = (\omega_1 b - \omega_2 a)\,\vec{j}} \quad \color{red}{(0{,}3)}$$

b) Item (b):

$$\begin{aligned}
\vec{a}_{A,rel} &= \vec{a}_{0,rel} + \left(\dot{\vec{\omega}}_2\right)_{rel} \wedge (A - O) + \vec{\omega}_2 \wedge [\vec{\omega}_2 \wedge (A - 0)] \\
&= \vec{0} + \vec{0} \wedge \left(b\vec{i} + a\vec{k}\right) + \omega_2 \vec{i} \wedge \left[\omega_2 \vec{i} \wedge \left(b\vec{i} + a\vec{k}\right)\right] \\
\vec{a}_{A,rel} &= \omega_2 \vec{i} \wedge \left[-\omega_2 a\vec{j}\right] \\
&= -\omega_2^2 a\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_{A,rel} = -\omega_2^2 a\vec{k}} \quad \color{red}{(0{,}4)} \\
\vec{a}_{A,arr} &= \vec{a}_{0,arr} + \dot{\vec{\omega}}_1 \wedge (A - O) + \vec{\omega}_1 \wedge [\vec{\omega}_1 \wedge (A - 0)] \\
&= \vec{0} + \vec{0} \wedge \left(b\vec{i} + a\vec{k}\right) + \omega_1 \vec{k} \wedge \left[\omega_1 \vec{k} \wedge \left(b\vec{i} + a\vec{k}\right)\right] \\
\vec{a}_{A,arr} &= \omega_1 \vec{k} \wedge \left[-\omega_1 b\vec{j}\right] \\
&= -\omega_1^2 b\vec{i} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_{A,arr} = -\omega_1^2 b\vec{i}} \quad \color{red}{(0{,}4)} \\
\vec{a}_{A,cor} &= 2\vec{\omega}_1 \wedge \vec{v}_{A,rel} = 2\omega_1 \vec{k} \wedge \left(-\omega_2 a\vec{j}\right) \\
&= 2\omega_1\omega_2 a\vec{i} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_{A,cor} = 2\omega_1\omega_2 a\vec{i}} \quad \color{red}{(0{,}4)} \\
\vec{a}_{A,abs} &= \vec{a}_{A,rel} + \vec{a}_{A,arr} + \vec{a}_{A,cor} = -\omega_2^2 a\vec{k} - \omega_1^2 b\vec{i} + 2\omega_1\omega_2 a\vec{i}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{a}_{A,abs} = \left(2\omega_1\omega_2 a - \omega_1^2 b\right)\vec{i} - \omega_2^2 a\vec{k}} \quad \color{red}{(0{,}4)}$$

c) Item (c):

$$\vec{\omega}_{abs} = \vec{\omega}_{rel} + \vec{\omega}_{arr} = \omega_2 \vec{i} + \omega_1 \vec{k} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\omega}_{abs} = \omega_2 \vec{i} + \omega_1 \vec{k}} \quad \color{red}{(0{,}4)}$$

$$\dot{\vec{\omega}}_{abs} = \left(\dot{\vec{\omega}}_{rel}\right)_{rel} + \dot{\vec{\omega}}_{arr} + \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{\omega}_{rel} = \vec{0} + \vec{0} + \omega_1 \vec{k} \wedge \omega_2 \vec{i} = \omega_2\omega_1 \vec{j} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{\vec{\omega}}_{abs} = \omega_2\omega_1 \vec{j}} \quad \color{red}{(0{,}4)}$$