ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

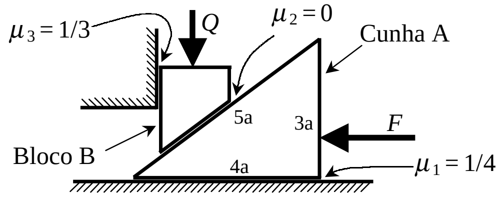
PME2100 – Mecânica A

Segunda Prova – 21 de outubro de 2003 – Duração: 110 minutos

Importante: não é permitido o uso de calculadoras

GABARITO

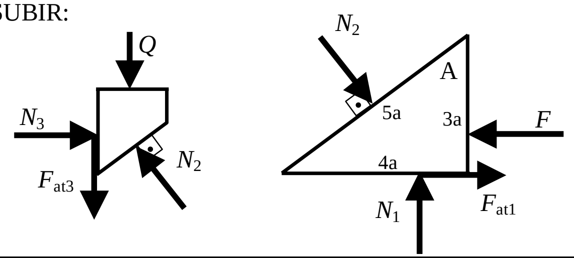
(3,0 pontos) 1 – Uma força F é aplicada na cunha A e uma força Q é aplicada no bloco B. Os pesos da cunha A e do bloco B são desprezíveis se comparados a Q. Os coeficientes de atrito estático são (ver figura) $\mu_1 = 1/4$, $\mu_2 = 0$, $\mu_3 = 1/3$. Determine o intervalo de valores de F, em função de Q, compatível com o equilíbrio.



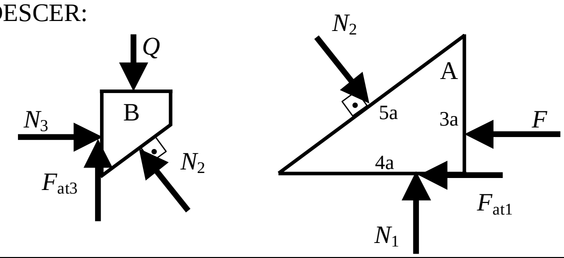
Solução:

DIAGRAMAS DE CORPO LIVRE (0,5 ponto)

Admitindo o caso limite em que o Bloco B tende a SUBIR:



Admitindo o caso limite em que o Bloco B tende a DESCER:



CONDIÇÕES DE EQUILÍBRIO (1,0 ponto)

(Bloco B tende a SUBIR)

No BLOCO B:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_3 - \frac{3}{5}N_2 = 0 \Rightarrow N_3 = \frac{3}{5}N_2$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{4}{5}N_2 - F_{at3} - Q = 0$$

Na CUNHA A:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \frac{3}{5}N_2 + F_{at1} - F = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -\frac{4}{5}N_2 + N_1 = 0 \Rightarrow N_2 = \frac{5}{4}N_1$$

(Bloco B tende a DESCER)

No BLOCO B:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_3 - \frac{3}{5}N_2 = 0 \Rightarrow N_3 = \frac{3}{5}N_2$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{4}{5}N_2 + F_{at3} - Q = 0$$

Na CUNHA A:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \frac{3}{5}N_2 - F_{at1} - F = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -\frac{4}{5}N_2 + N_1 = 0 \Rightarrow N_2 = \frac{5}{4}N_1$$

NA IMINÊNCIA DOS ESCORREGAMENTOS: (0,5 ponto)

$$F_{at1} = \mu_1 N_1 = \frac{1}{4}N_1; \qquad F_{at2} = \mu_2 N_2 = 0; \qquad F_{at3} = \mu_3 N_3 = \frac{1}{3}N_3$$

(Bloco B tende a SUBIR)

Desta forma:

$$\frac{3}{5}\frac{5}{4}N_1 + \frac{1}{4}N_1 - F = 0 \Rightarrow \frac{3}{4}N_1 + \frac{1}{4}N_1 = F \Rightarrow N_1 = F$$

$$N_3 = \frac{3}{5}N_2 \Rightarrow N_3 = \frac{3}{5}\frac{5}{4}N_1 \Rightarrow N_3 = \frac{3}{4}N_1 \Rightarrow N_3 = \frac{3}{4}F$$

$$\frac{4}{5}N_2 - \frac{1}{3}N_3 - Q = 0 \Rightarrow \frac{4}{5}\frac{5}{4}F - \frac{1}{3}\frac{3}{4}F = Q \Rightarrow \frac{3}{4}F = Q$$

Portanto: $\boxed{F = \frac{4}{3}Q}$

(Bloco B tende a DESCER)

Desta forma:

$$\frac{3}{5}\frac{5}{4}N_1 - \frac{1}{4}N_1 - F = 0 \Rightarrow \frac{3}{4}N_1 - \frac{1}{4}N_1 = F \Rightarrow N_1 = 2F$$

$$N_3 = \frac{3}{5}N_2 \Rightarrow N_3 = \frac{3}{5}\frac{5}{4}N_1 \Rightarrow N_3 = \frac{3}{4}N_1 \Rightarrow N_3 = \frac{3}{2}F$$

$$\frac{4}{5}N_2 + \frac{1}{3}N_3 - Q = 0 \Rightarrow \frac{4}{5}\frac{5}{4}2F + \frac{1}{3}\frac{3}{4}2F = Q \Rightarrow \frac{5}{2}F = Q$$

Portanto: $\boxed{F = \frac{2}{5}Q}$

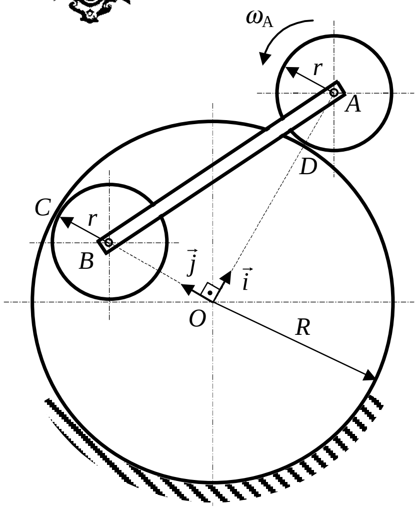
O intervalo de F compatível com o equilíbrio é: $\frac{2}{5}Q \le F \le \frac{4}{3}Q$ **(0,5 ponto para a resposta final)**

(0,5 ponto se identificar as duas condições de equilíbrio)

Departamento de Engenharia Mecânica - Av. Prof. Mello Moraes, 2231 - São Paulo - SP - 05508-900 Brasil - Tel: (011) 3091-5355 - Fax: (011) 3091-1886

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica



Para maior clareza, foi omitido da figura o mecanismo que mantêm os discos em contato com a circunferência fixa.

(3,5 pontos) 2 – Os discos de centros *A* e *B* têm o mesmo raio *r* e rolam sem escorregar, externa e internamente à circunferência fixa no solo, de centro *O* e raio *R*. O movimento dos discos e da barra *AB* se dá no plano do sistema móvel $O\vec i\,\vec j$, indicado na figura. É dado o vetor de rotação do disco de centro *A*: $\vec\omega_A = \omega_A \vec k$ (ω_A constante, $\vec k = \vec i \wedge \vec j$).

a) Localize o centro instantâneo de rotação (*CIR*) do disco de centro *A* e o *CIR* do disco de centro *B*. Localize graficamente a posição do *CIR* da barra *AB* (justifique).

b) Determine a velocidade $\vec v_A$ do ponto *A*, o vetor de rotação $\vec\Omega$ da barra *AB*, a velocidade $\vec v_B$ do ponto *B* e o vetor de rotação $\vec\omega_B$ do disco de centro *B*.

c) Calcule a aceleração $\vec a_A$ do ponto *A*.

d) Calcule a aceleração $\vec a_D$ do ponto *D* do disco (de centro *A*) que está em contato com a circunferência fixa.

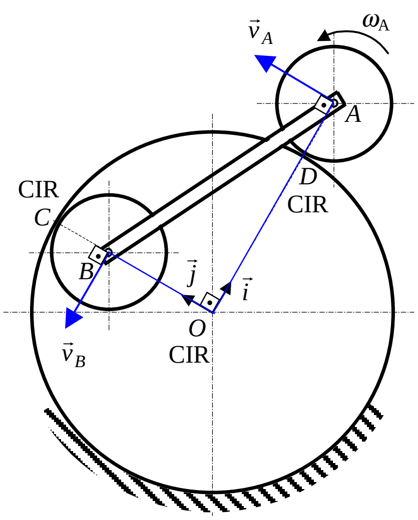
Obs.: use a base $\vec i\,\vec j\,\vec k$ para expressar as grandezas cinemáticas.

Item a)

O disco A rola sem escorregar, portanto, o ponto de contato *D* tem velocidade nula e é o CIR desse disco.
(0,25 ponto)

O disco B rola sem escorregar, portanto, o ponto de contato *C* tem velocidade nula e é o CIR desse disco.
(0,25 ponto)

Determinando graficamente o CIR da barra AB:



Justificativas:
A velocidade de *A* é perpendicular a *AD*.
A velocidade de *B* é perpendicular a *BC*.

Portanto o CIR da barra *AB* é o ponto *O*.
(0,5 ponto)

Item b)

$\vec v_A = v_A \vec j = \omega_A r \vec j$ **(0,25 ponto)**

$$\left.\begin{array}{l}\vec v_A = v_A \vec j = \omega_A r \vec j\\ \vec v_A = v_A \vec j = \Omega(R+r)\vec j\end{array}\right\}\Rightarrow \Omega(R+r) = \omega_A r \Rightarrow \Omega = \frac{\omega_A r}{(R+r)}$$

$\vec\Omega = \frac{\omega_A r}{(R+r)}\vec k$ **(0,5 ponto)**

$$\left.\begin{array}{l}\vec v_B = v_B(-\vec i) = \Omega(R-r)(-\vec i)\\ \vec v_B = v_B(-\vec i) = \omega_B r(-\vec i)\end{array}\right\}\Rightarrow \omega_B r = \Omega(R-r)$$

$$\vec\omega_B = -\frac{\Omega(R-r)}{r}\vec k = -\frac{\omega_A r}{(R+r)}\frac{(R-r)}{r}\vec k \Rightarrow$$

$\vec\omega_B = -\frac{\omega_A(R-r)}{(R+r)}\vec k$ **(0,5 ponto)**

$\vec v_B = -\frac{\omega_A r(R-r)}{(R+r)}\vec i$ **(0,25 ponto)**

Item c)

O ponto *A* descreve um movimento circular uniforme:

$$\vec a_A = -\Omega^2(R+r)\vec i = -\frac{\omega_A^2 r^2}{(R+r)^2}(R+r)\vec i \Rightarrow$$

$\vec a_A = -\frac{\omega_A^2 r^2}{(R+r)}\vec i$ **(0,5 ponto)**

Item d)

$$\vec a_D = \vec a_A + \dot{\vec\omega}_A \wedge (D-A) + \vec\omega_A \wedge [\vec\omega_A \wedge (D-A)]$$

$$\vec a_D = -\frac{\omega_A^2 r^2}{(R+r)}\vec i + \vec 0 \wedge (-r\vec i) + \omega_A \vec k \wedge [\omega_A \vec k \wedge (-r\vec i)]$$

$$\vec a_D = -\frac{\omega_A^2 r^2}{(R+r)}\vec i + \omega_A^2 r \vec i \Rightarrow \vec a_D = \left[\omega_A^2 r - \frac{\omega_A^2 r^2}{(R+r)}\right]\vec i$$

$\Rightarrow \vec a_D = \frac{\omega_A^2 Rr}{(R+r)}\vec i$ **(0,5 ponto)**

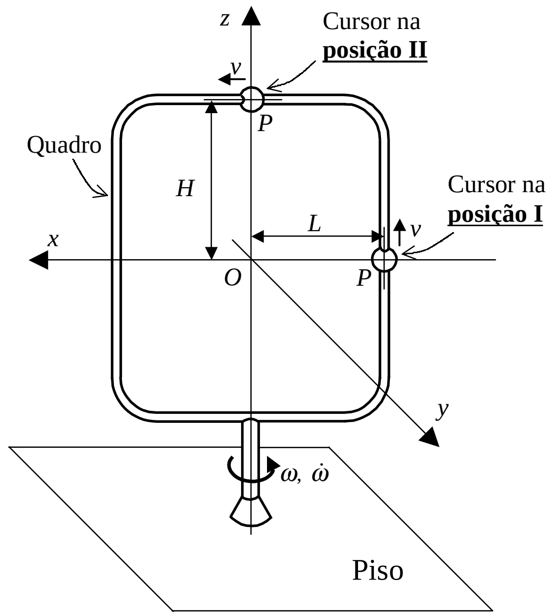
(3,5 pontos) 3 – O quadro está preso em um eixo vertical e seu vetor de rotação é $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$, e seu vetor aceleração angular é $\dot{\vec{\omega}} = \dot{\omega} \vec{k}$, ambos conhecidos. Um cursor percorre o quadro com velocidade relativa *v*, conhecida e de módulo constante. Use o sistema *Oxyz*, fixo no quadro, para expressar as grandezas cinemáticas. Adote o piso como referencial fixo e o quadro como referencial móvel.

a) Considerando o instante em que o cursor está na **posição I**, determine a velocidade relativa, a velocidade de arrastamento e a velocidade absoluta do centro *P* do cursor.

b) Considerando o instante em que o cursor está na **posição I**, determine a aceleração relativa, a aceleração de arrastamento, a aceleração de Coriolis (complementar) e a aceleração absoluta do centro *P* do cursor.

c) Considerando o instante em que o cursor está na **posição II**, determine a velocidade relativa, a velocidade de arrastamento e a velocidade absoluta do centro *P* do cursor.

d) Considerando o instante em que o cursor está na **posição II**, determine a aceleração relativa, a aceleração de arrastamento, a aceleração de Coriolis (complementar) e a aceleração absoluta do centro *P* do cursor.



Solução:

Item a)

$\boxed{\vec{v}_{P,rel} = v\,\vec{k}}$ **(0,25 ponto)**

$\vec{v}_{P,arr} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (P-O) = \vec{0} + \omega\,\vec{k} \wedge L(-\vec{i}) \Rightarrow$

$\boxed{\vec{v}_{P,arr} = -\omega\,L\,\vec{j}}$ **(0,25 ponto)**

$\vec{v}_{P,abs} = \vec{v}_{P,rel} + \vec{v}_{P,arr} \Rightarrow$

$\boxed{\vec{v}_{P,abs} = v\,\vec{k} - \omega\,L\,\vec{j}}$ **(0,25 ponto)**

Item c)

$\boxed{\vec{v}_{P,rel} = v\,\vec{i}}$ **(0,25 ponto)**

$\vec{v}_{P,arr} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (P-O) = \vec{0} + \omega\,\vec{k} \wedge H\,\vec{k} \Rightarrow$

$\boxed{\vec{v}_{P,arr} = \vec{0}}$ **(0,25 ponto)**

$\vec{v}_{P,abs} = \vec{v}_{P,rel} + \vec{v}_{P,arr} \Rightarrow$

$\boxed{\vec{v}_{P,abs} = v\,\vec{i}}$ **(0,25 ponto)**

Item b)

$\boxed{\vec{a}_{P,rel} = \vec{0}}$, pois v é constante **(0,25 ponto)**

$\vec{a}_{P,arr} = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P-O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P-O)] =$

$= \vec{0} + \dot{\omega}\,\vec{k} \wedge L(-\vec{i}) + \omega\,\vec{k} \wedge [\omega\,\vec{k} \wedge L(-\vec{i})] \Rightarrow$

$\boxed{\vec{a}_{P,arr} = \omega^2 L\,\vec{i} - \dot{\omega}\,L\,\vec{j}}$ **(0,25 ponto)**

$\vec{a}_{P,Cor} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{P,rel} = 2\omega\,\vec{k} \wedge v\,\vec{k} \Rightarrow$

$\boxed{\vec{a}_{P,Cor} = \vec{0}}$ **(0,25 ponto)**

$\vec{a}_{P,abs} = \vec{a}_{P,rel} + \vec{a}_{P,arr} + \vec{a}_{P,Cor} = \vec{0} - \dot{\omega}\,L\,\vec{j} + \omega^2 L\,\vec{i} + \vec{0} \Rightarrow$

$\boxed{\vec{a}_{P,abs} = \omega^2 L\,\vec{i} - \dot{\omega}\,L\,\vec{j}}$ **(0,25 ponto)**

Item d)

$\boxed{\vec{a}_{P,rel} = \vec{0}}$ **(0,25 ponto)**

$\vec{a}_{P,arr} = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P-O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P-O)] =$

$= \vec{0} + \dot{\omega}\,\vec{k} \wedge H\,\vec{k} + \omega\,\vec{k} \wedge (\omega\,\vec{k} \wedge H\,\vec{k}) \Rightarrow$

$\boxed{\vec{a}_{P,arr} = \vec{0}}$ **(0,25 ponto)**

$\vec{a}_{P,Cor} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{P,rel} = 2\omega\,\vec{k} \wedge v\,\vec{i} \Rightarrow$

$\boxed{\vec{a}_{P,Cor} = 2\omega\,v\,\vec{j}}$ **(0,25 ponto)**

$\vec{a}_{P,abs} = \vec{a}_{P,rel} + \vec{a}_{P,arr} + \vec{a}_{P,Cor} = \vec{0} + \vec{0} + 2\omega\,v\,\vec{j} \Rightarrow$

$\boxed{\vec{a}_{P,abs} = 2\omega\,v\,\vec{j}}$ **(0,25 ponto)**

Departamento de Engenharia Mecânica - Av. Prof. Mello Moraes, 2231 - São Paulo - SP - 05508-900 Brasil - Tel: (011) 3091-5355 - Fax: (011) 3091-1886