ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

PMC 2100 – MECÂNICA A

Segunda Prova – 26 de outubro de 2001 – Duração: 100 minutos

(Não é permitido o uso de calculadoras)

Questão 1 (3,0 pontos)

A plataforma esquematizada na figura foi instrumentada nos pontos A, B e C com a finalidade de registrar seu movimento. A velocidade desses pontos num instante vale:

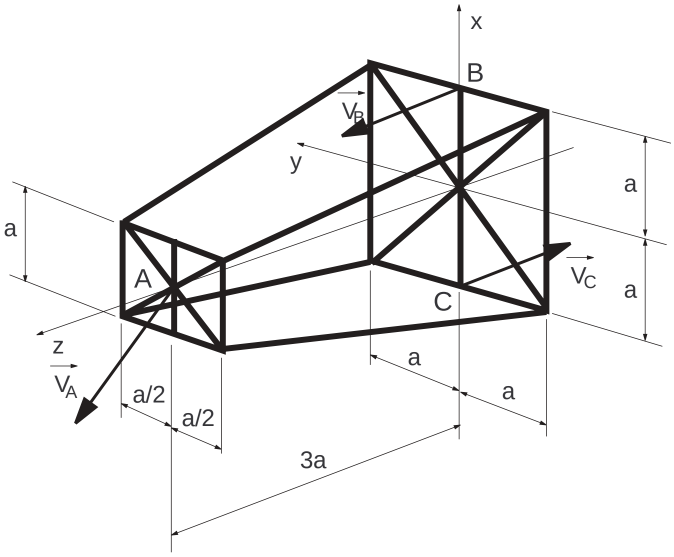
$\vec{v}_A = -6v\vec{i} + v\vec{k}$ $\quad \vec{v}_B = 3v\vec{k}$ $\quad \vec{v}_C = -v\vec{k}$

Pede-se:

a) Verificar que as velocidades $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$ respeitam a condição de corpo rígido da plataforma.

b) Determinar o vetor velocidade angular da plataforma

$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$



a) Propriedade fundamental do C.R.:

$$\vec{v}_A \cdot (A - B) = \vec{v}_B \cdot (A - B)$$

$$\left(-6v\vec{i} + v\vec{k}\right) \cdot \left(-a\vec{i} + 3a\vec{k}\right) = 3v\vec{k} \cdot \left(-a\vec{i} + 3a\vec{k}\right)$$

$$6av + 3av = 9av$$

$\Rightarrow \quad \boxed{9av = 9av} \quad \Rightarrow$ Ok! As vels. de A e B respeitam a condição de C.R. da plataforma.

b)

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \wedge (A - B)$$

$$-6v\vec{i} + v\vec{k} = 3v\vec{k} + \left(\omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}\right) \wedge \left(-a\vec{i} + 3a\vec{k}\right)$$

$$-6v\vec{i} - 2v\vec{k} = -3a\omega_x \vec{j} + a\omega_y \vec{k} + 3a\omega_y \vec{i} - a\omega_z \vec{j}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_y = -\frac{2v}{a} \qquad ; \qquad -3\omega_x = \omega_z$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_C + \vec{\omega} \wedge (B - C)$$

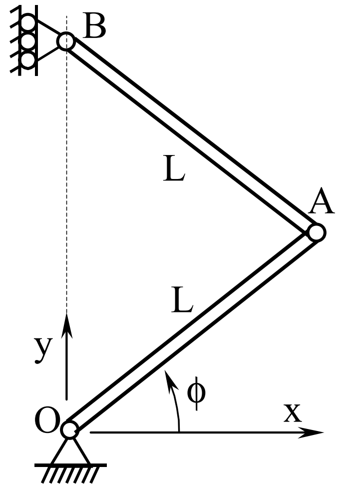
$$3v\vec{k} = -v\vec{k} + \left(\omega_x \vec{i} - \frac{2v}{a}\vec{j} - \omega_x \vec{k}\right) \wedge 2a\vec{i}$$

$$4v\vec{k} = 4v\vec{k} - 6a\omega_x \vec{j}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_x = 0 \qquad \Rightarrow \quad \omega_z = 0$$

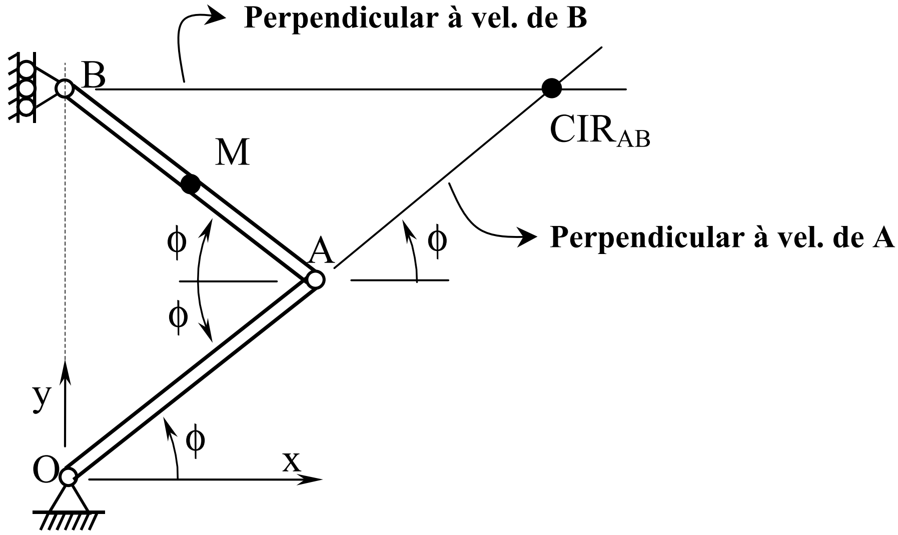
$$\boxed{\vec{\omega} = -\frac{2v}{a}\vec{j}}$$

Questão 2 (4,0 pontos)



O sistema indicado move-se no plano $O\vec{i}\vec{j}$. A barra OA gira em torno de O, de maneira que $\phi=\omega t$ ($\omega>0$, cte.). No ponto A, as barras estão ligadas por uma articulação. A extremidade B percorre um trecho do eixo $O\vec{j}$. Pede-se, expressando os vetores na base $\vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k}$:

a) A posição do CIR da barra AB.
b) A velocidade de B ($\vec{v}_B$) e a velocidade de A ($\vec{v}_A$).
c) O vetor de rotação ($\vec{\Omega}$) da barra AB.
d) A velocidade $\vec{v}_M$ do ponto médio de AB, M



Para A e O:

$$\vec{v}_A = \omega\vec{k} \wedge \left(L\cos\phi\vec{i} + L\,\text{sen}\,\phi\vec{j}\right)$$

$$\boxed{\vec{v}_A = \omega L\left(-\text{sen}\,\phi\vec{i} + \cos\phi\vec{j}\right)}$$

Para A e CIR$_{AB}$:

$$\vec{v}_A = \Omega\vec{k} \wedge \left(-L\cos\phi\vec{i} - L\,\text{sen}\,\phi\vec{j}\right)$$

$$\omega L\left(-\text{sen}\,\phi\vec{i} + \cos\phi\vec{j}\right) = \Omega L\left(\text{sen}\,\phi\vec{i} - \cos\phi\vec{j}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \omega = -\Omega$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\Omega} = -\omega\vec{k}}$$

Para B e CIR$_{AB}$:

$$\vec{v}_B = -\omega\vec{k} \wedge \left(-2L\cos\phi\vec{i}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}_B = 2\omega L\cos\phi\vec{j}}$$

Para M e B:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_B - \omega\vec{k} \wedge \frac{L}{2}\left(\cos\phi\vec{i} - \text{sen}\,\phi\vec{j}\right)$$

$$\vec{v}_M = 2\omega L\cos\phi\vec{j} - \frac{\omega L}{2}\cos\phi\vec{j} - \frac{\omega L}{2}\text{sen}\,\phi\vec{i}$$

$$\boxed{\vec{v}_M = \frac{\omega L}{2}\left(-\text{sen}\,\phi\vec{i} + 3\cos\phi\vec{j}\right)}$$

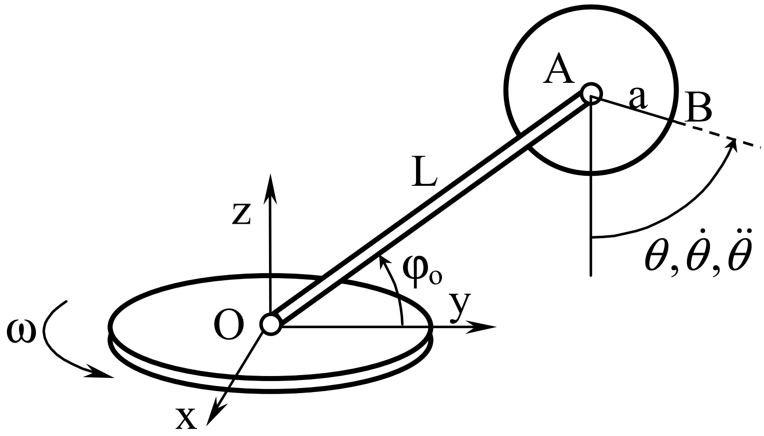
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

Questão 3 (3,0 pontos)

A plataforma circular mostrada na figura tem velocidade angular ω constante. A barra OA e o disco de raio a e centro A giram com a plataforma, permanecendo sempre no plano Oyz do sistema de coordenadas (O,x,y,z) de versores ($\vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k}$) solidário à plataforma. O ângulo φ_o é constante. Pede-se, em função de $\theta,\dot{\theta},\ddot{\theta}$ e demais dados do problema:

a) Os vetores velocidade relativa, de arrastamento e absoluta do ponto B, pertencente à periferia do disco.
b) Os vetores aceleração relativa, de arrastamento e absoluta do mesmo ponto B.
c) O vetor rotação absoluta Ω do disco.



$$\vec{v}_{B,rel} = \dot{\theta}\vec{i} \wedge a\left(\operatorname{sen}\theta\vec{j} - \cos\theta\vec{k}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}_{B,rel} = \dot{\theta}a\left(\cos\theta\vec{j} + \operatorname{sen}\theta\vec{k}\right)}$$

$$\vec{v}_{B,arr} = \omega\vec{k} \wedge \left[\left(L\cos\varphi_0 + a\operatorname{sen}\theta\right)\vec{j} + \left(L\operatorname{sen}\varphi_0 + a\cos\theta\right)\vec{k}\right]$$

$$\boxed{\vec{v}_{B,arr} = -\omega\left(L\cos\varphi_0 + a\operatorname{sen}\theta\right)\vec{i}}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{B,rel} + \vec{v}_{B,arr} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}_B = -\omega\left(L\cos\varphi_0 + a\operatorname{sen}\theta\right)\vec{i} + \dot{\theta}a\left(\cos\theta\vec{j} + \operatorname{sen}\theta\vec{k}\right)}$$

$$\vec{a}_{B,rel} = \ddot{\theta}\vec{i} \wedge a\left(\operatorname{sen}\theta\vec{j} - \cos\theta\vec{k}\right) + \dot{\theta}^2\vec{i} \wedge \left[\vec{i} \wedge a\left(\operatorname{sen}\theta\vec{j} - \cos\theta\vec{k}\right)\right]$$

$$\boxed{\vec{a}_{B,rel} = \ddot{\theta}a\left(\cos\theta\vec{j} + \operatorname{sen}\theta\vec{k}\right) + \dot{\theta}^2 a\left(-\operatorname{sen}\theta\vec{j} + \cos\theta\vec{k}\right)}$$

$$\vec{a}_{B,arr} = \omega^2\vec{k} \wedge \left\{\vec{k} \wedge \left[\left(L\cos\varphi_0 + a\operatorname{sen}\theta\right)\vec{j} + \left(L\operatorname{sen}\varphi_0 + a\cos\theta\right)\vec{k}\right]\right\}$$

$$\boxed{\vec{a}_{B,arr} = -\omega^2\left(L\cos\varphi_0 + a\operatorname{sen}\theta\right)\vec{j}}$$

$$\vec{a}_{B,cor} = 2\omega\vec{k} \wedge \vec{v}_{B,rel} = 2\omega\vec{k} \wedge \dot{\theta}a\left(\cos\theta\vec{j} + \operatorname{sen}\theta\vec{k}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_{B,cor} = -2\omega\dot{\theta}a\cos\theta\vec{i}}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{B,rel} + \vec{a}_{B,arr} + \vec{a}_{B,cor} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{a}_B = -2\omega\dot{\theta}a\cos\theta\vec{i} + \left[\ddot{\theta}a\cos\theta - \dot{\theta}^2 a\operatorname{sen}\theta - \omega^2\left(L\cos\varphi_0 + a\operatorname{sen}\theta\right)\right]\vec{j} + \left(\ddot{\theta}a\operatorname{sen}\theta + \dot{\theta}^2 a\cos\theta\right)\vec{k}}$$

$$\vec{\Omega} = \vec{\omega}_{arr} + \vec{\omega}_{rel} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\Omega} = \omega\vec{k} + \dot{\theta}\vec{i}}$$