ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

PMC 2100 – MECÂNICA A

Segunda Prova – 03 de novembro de 2000

GABARITO

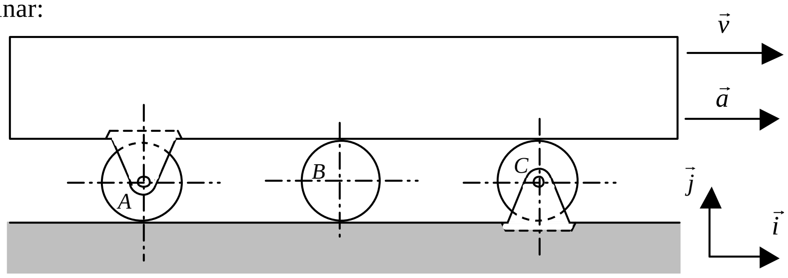
(3,0 pontos) Questão 1 - O vagonete da figura tem velocidade $v\vec{i}$ e aceleração $a\vec{i}$, e é sustentado por três discos de raio *r*. O disco *B* está em contato com o chão e o vagonete. Todos os discos rodam sem escorregar sobre as respectivas superfícies de contato. Determinar:

a) O CIR dos discos *A*, *B* e *C*.

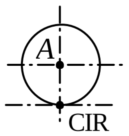
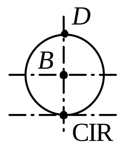
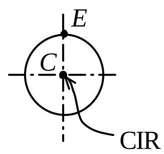
b) Os vetores de rotação dos discos *A*, *B* e *C*.

c) Os vetores acelerações angulares dos discos *A*, *B* e *C*.

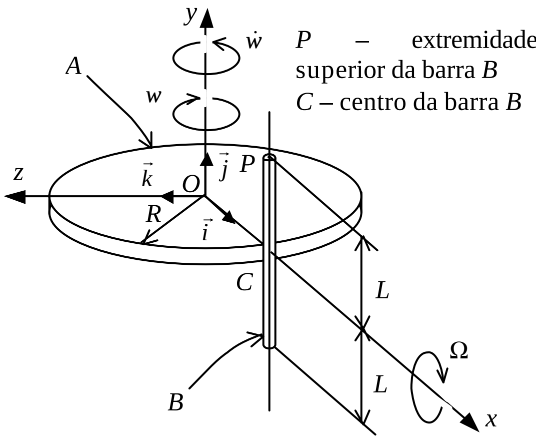
d) As acelerações dos pontos *A*, *B* e *C*, que são os centros geométricos dos discos *A*, *B* e *C*.



Solução:

		Disco *A*	Disco *B*	Disco *C*
0,75	a)			
0,75	b)	$\left.\begin{array}{l}\vec{v}_A = v\vec{i}\\ \vec{v}_A = w_A\vec{k}\times r\vec{j} = -w_A r\vec{i}\end{array}\right\}\Rightarrow$ $\vec{w}_A = -\frac{v}{r}\vec{k}$	$\left.\begin{array}{l}\vec{v}_D = v\vec{i}\\ \vec{v}_D = w_B\vec{k}\times 2r\vec{j} = -w_B 2r\vec{i}\end{array}\right\}\Rightarrow$ $\vec{w}_B = -\frac{v}{2r}\vec{k}$	$\left.\begin{array}{l}\vec{v}_E = v\vec{i}\\ \vec{v}_E = w_C\vec{k}\times r\vec{j} = -w_C r\vec{i}\end{array}\right\}\Rightarrow$ $\vec{w}_C = -\frac{v}{r}\vec{k}$
0,75	c)	$\vec{w}_A = -\frac{v}{r}\vec{k} \Rightarrow$ $\dot{\vec{w}}_A = -\frac{a}{r}\vec{k}$	$\vec{w}_B = -\frac{v}{2r}\vec{k} \Rightarrow$ $\dot{\vec{w}}_B = -\frac{a}{2r}\vec{k}$	$\vec{w}_C = -\frac{v}{r}\vec{k} \Rightarrow$ $\dot{\vec{w}}_C = -\frac{a}{r}\vec{k}$
0,75	d)	$\vec{v}_A = v\vec{i} \Rightarrow$ $\vec{a}_A = a\vec{i}$	$\vec{v}_B = w_B\vec{k}\times r\vec{j} = \frac{v}{2r}r\vec{i} = \frac{v}{2}\vec{i} \Rightarrow$ $\vec{a}_B = \frac{a}{2}\vec{i}$	$\vec{v}_C = \vec{0}$ (constante) $\Rightarrow$ $\vec{a}_C = \vec{0}$

(3,5 pontos) Questão 2 - O disco A de raio R gira em torno do eixo vertical y e a barra B de comprimento $2L$ está conectada ao disco por meio de um eixo horizontal que gira junto com o disco. A barra B gira em torno desse eixo com velocidade angular relativa ao disco igual a $-\Omega\vec{i}$, constante.



Na posição da figura o disco tem velocidade angular $-w\,\vec{j}$ e aceleração angular $\dot{w}\,\vec{j}$. Expressando as respostas na base do sistema de coordenadas *Oxyz*, solidário ao disco, pede-se para calcular:

a) A velocidade absoluta do ponto C, a velocidade relativa do ponto P e a velocidade absoluta do ponto P.

b) A aceleração absoluta do ponto C.

c) A aceleração relativa do ponto P.

d) A aceleração absoluta do ponto P.

Solução:

1,5 **a)**

$$\vec{v}_C = \vec{v}_O + \vec{w}\times\vec{r}_{C/O}$$
$$\vec{v}_C = \vec{0} - w\,\vec{j}\times R\,\vec{i}$$
$$\vec{v}_C = w\,R\,\vec{k}$$

$$\vec{v}_{P,rel} = \vec{v}_{C,rel} + \vec{\Omega}\times\vec{r}_{P/C}$$
$$\vec{v}_{P,rel} = \vec{0} - \Omega\,\vec{i}\times L\,\vec{j}$$
$$\vec{v}_{P,rel} = -\Omega L\,\vec{k}$$

$$\vec{v}_{P,ar} = \vec{v}_C + \vec{w}\times\vec{r}_{P/C}$$
$$\vec{v}_{P,ar} = w\,R\,\vec{k} - w\,\vec{j}\times L\,\vec{j}$$
$$\vec{v}_{P,ar} = w\,R\,\vec{k}$$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{P,rel} + \vec{v}_{P,ar}$$
$$\vec{v}_P = -\Omega L\,\vec{k} + w\,R\,\vec{k}$$
$$\vec{v}_P = (w\,R - \Omega L)\vec{k}$$

0,5 **b)**

$$\vec{a}_C = \vec{a}_O + \dot{\vec{w}}\times\vec{r}_{C/O} + \vec{w}\times(\vec{w}\times\vec{r}_{C/O})$$
$$\vec{a}_C = \vec{0} + \dot{w}\,\vec{j}\times R\,\vec{i} - w\,\vec{j}\times(-w\,\vec{j}\times R\,\vec{i})$$
$$\vec{a}_C = -\dot{w}\,R\,\vec{k} - w^2 R\,\vec{i}$$

c) 0,5

$$\vec{a}_{P,rel} = \vec{a}_{C,rel} + \left(\dot{\vec{\Omega}}\right)_{rel}\times\vec{r}_{P/C} + \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}_{P/C})$$
$$\vec{a}_{P,rel} = \vec{0} + \vec{0}\times L\,\vec{j} - \Omega\,\vec{i}\times(-\Omega\,\vec{i}\times L\,\vec{j})$$
$$\vec{a}_{P,rel} = -\Omega^2 L\,\vec{j}$$

1,0 **d)**

$$\vec{a}_{P,ar} = \vec{a}_C + \dot{\vec{w}}\times\vec{r}_{P/C} + \vec{w}\times(\vec{w}\times\vec{r}_{P/C})$$
$$\vec{a}_{P,ar} = -\dot{w}\,R\,\vec{k} - w^2 R\,\vec{i} + \dot{w}\,\vec{j}\times L\,\vec{j} - w\,\vec{j}\times(-w\,\vec{j}\times L\,\vec{j})$$
$$\vec{a}_{P,ar} = -\dot{w}\,R\,\vec{k} - w^2 R\,\vec{i}$$

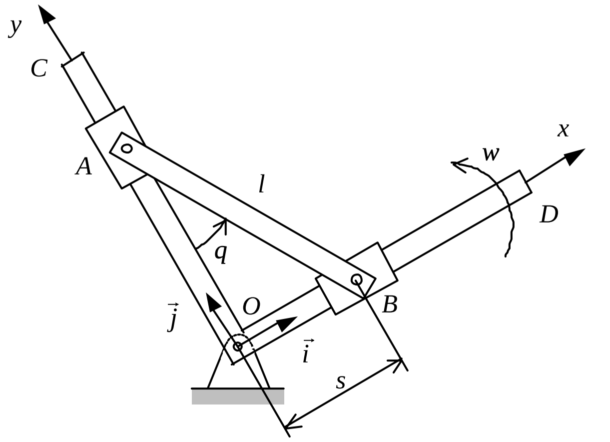
$$\vec{a}_{P,cor} = 2\vec{w}\times\vec{v}_{P,rel}$$
$$\vec{a}_{P,cor} = -2w\,\vec{j}\times -\Omega L\,\vec{k}$$
$$\vec{a}_{P,cor} = 2w\,\Omega L\,\vec{i}$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{P,rel} + \vec{a}_{P,ar} + \vec{a}_{P,cor}$$
$$\vec{a}_P = (-\Omega^2 L\,\vec{j}) + (-\dot{w}\,R\,\vec{k} - w^2 R\,\vec{i}) + (2w\,\Omega L\,\vec{i})$$
$$\vec{a}_P = (2w\,\Omega L - w^2 R)\vec{i} - \Omega^2 L\,\vec{j} - \dot{w}\,R\,\vec{k}$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

(3,5 pontos) Questão 3 - A barra *COD* gira com velocidade angular w constante ao redor do eixo z que passa por O. A extremidade B da barra AB desliza sobre o braço OD com velocidade $\dot{s}$ constante. Pede-se para determinar, expressando os vetores na base $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, e em função de $\dot{s}$, l, w e q :



a) As velocidades relativa, de arrastamento e absoluta do ponto *B*.

b) As acelerações relativa, de arrastamento e absoluta do ponto *B*.

c) A velocidade relativa do ponto *A*, a velocidade angular relativa da barra *AB* ($\dot{q}$) e a velocidade absoluta do ponto *A*.

d) A velocidade angular absoluta da barra *AB*.

Solução:

1,0 **a)**

$$\vec{v}_{B,rel} = \dot{s}\,\vec{i}$$

$$\vec{v}_{B,ar} = \vec{v}_O + \vec{w} \times \vec{r}_{B/O}$$

$$\vec{v}_{B,ar} = \vec{0} + w\,\vec{k} \times s\,\vec{i} = w\,\vec{k} \times (l\,\mathrm{sen}\,q)\,\vec{i}$$

$$\vec{v}_{B,ar} = w\,l\,\mathrm{sen}\,q\;\vec{j}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{B,rel} + \vec{v}_{B,ar}$$

$$\vec{v}_B = \dot{s}\,\vec{i} + w\,l\,\mathrm{sen}\,q\;\vec{j}$$

1,0 **b)**

$$\vec{a}_{B,rel} = \ddot{s}\,\vec{i}$$

$$\vec{a}_{B,rel} = \vec{0}$$

$$\vec{a}_{B,ar} = \vec{a}_O + \dot{\vec{w}} \times \vec{r}_{B/O} + \vec{w} \times \left(\vec{w} \times \vec{r}_{B/O}\right)$$

$$\vec{a}_{B,ar} = \vec{0} + \vec{0} \times l\,\mathrm{sen}\,q\;\vec{i} + w\,\vec{k} \times \left(w\,\vec{k} \times l\,\mathrm{sen}\,q\;\vec{i}\right)$$

$$\vec{a}_{B,ar} = -w^2\;l\,\mathrm{sen}\,q\;\vec{i}$$

$$\vec{a}_{B,cor} = 2\vec{w} \times \vec{v}_{B,rel}$$

$$\vec{a}_{B,cor} = 2w\,\vec{k} \times \dot{s}\,\vec{i}$$

$$\vec{a}_{B,cor} = 2w\,\dot{s}\;\vec{j}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{B,rel} + \vec{a}_{B,ar} + \vec{a}_{B,cor} = \left(\vec{0}\right) + \left(-w^2\;l\,\mathrm{sen}\,q\;\vec{i}\right) + \left(2w\,\dot{s}\;\vec{j}\right)$$

$$\vec{a}_B = -w^2\;l\,\mathrm{sen}\,q\;\vec{i} + 2w\,\dot{s}\;\vec{j}$$

1,0 **c)**

$$\vec{v}_{A,rel} = \vec{v}_{B,rel} + \dot{\vec{q}} \times \vec{r}_{A/B} = \dot{s}\,\vec{i} + \dot{q}\,\vec{k} \times l\left(-\mathrm{sen}\,q\;\vec{i} + \cos q\;\vec{j}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_{A,rel} = \dot{s}\,\vec{i} - \dot{q}\,l\,\mathrm{sen}\,q\;\vec{j} - \dot{q}\,l\cos q\;\vec{i} \\ \vec{v}_{A,rel} = v_{A,rel}\;\vec{j} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \dot{q} = \frac{\dot{s}}{l\cos q}$$

$$v_{A,rel} = -\dot{q}\,l\,\mathrm{sen}\,q = -\dot{s}\,\mathrm{tg}\,q$$

$$\vec{v}_{A,rel} = -\dot{s}\,\mathrm{tg}\,q\;\vec{j}$$

$$\vec{v}_{A,ar} = \vec{v}_O + \vec{w} \times \vec{r}_{A/O}$$

$$\vec{v}_{A,ar} = \vec{0} + w\,\vec{k} \times l\cos q\;\vec{j}$$

$$\vec{v}_{A,ar} = -w\,l\cos q\;\vec{i}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{A,ar} + \vec{v}_{A,rel}$$

$$\vec{v}_A = -w\,l\cos q\;\vec{i} - \dot{s}\,\mathrm{tg}\,q\;\vec{j}$$

0,5 **d)**

$$\vec{w}_{AB} = \vec{w}_{rel} + \vec{w}_{ar} = \dot{q}\,\vec{k} + w\,\vec{k} = \frac{\dot{s}}{l\cos q}\vec{k} + w\,\vec{k}$$

$$\vec{w}_{AB} = \left(\frac{\dot{s}}{l\cos q} + w\right)\vec{k}$$

Obs.: no item (**c**) podemos calcular $\dot{q}$ também por:

$$s = l\,\mathrm{sen}\,q \Rightarrow \dot{s} = l\left(\cos q\right)\dot{q}$$

$$\dot{q} = \frac{\dot{s}}{l\cos q}$$