ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

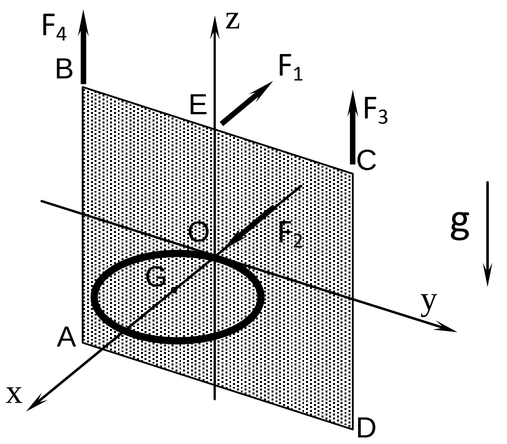
PME 3100 – MECÂNICA I – Primeira Prova – 10 de abril de 2015

Duração da Prova: 110 minutos (não é permitido uso de calculadoras)

1ª Questão (**3,0 pontos**)

No sistema mostrado na figura, a placa quadrada *ABCD* está posicionada no plano *yz* e possui massa *2m/3*. Cada lado da placa mede *2a* e as distâncias BE e OE valem *a*. *A* placa está soldada no ponto *O* a um aro no plano *xy*, de raio *R*, centro *G* e massa *m/3*. Sobre a placa agem as forças $(\vec{F}_1, E)$, $(\vec{F}_2, O)$, $(\vec{F}_3, C)$ e $(\vec{F}_4, B)$, em que $\vec{F}_1 = -F\vec{i}$, $\vec{F}_2 = Q\vec{i}$, $\vec{F}_3 = mg/2\vec{k}$ e $\vec{F}_4 = mg/2\vec{k}$. Pede-se:

a) As coordenadas do baricentro do conjunto, considerando o sistema *Oxyz*.
b) A relação entre as constantes dadas (*P*, *F*, *Q*, *a* e *R*) para que o sistema de forças seja redutível a uma única força.
c) A relação entre as constantes dadas (*P*, *F*, *Q*, *a* e *R*) para que o sistema de forças não cause tendência de rotação em torno do eixo *Oy*.

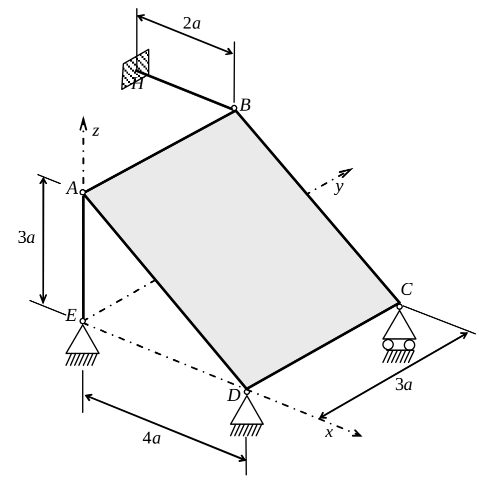


2ª Questão (**3,5 pontos**)

Na figura ao lado, a barra bi-articulada HB tem peso P, a barra bi-articulada AE tem peso desprezível e a placa retangular, articulada nos pontos A, B e D e vinculada ao apoio simples em C, tem peso $2P$.

Pede-se:

(a) esboçar os diagramas de corpo livre das barras AE e HB;
(b) esboçar o diagrama de corpo livre da placa $ABCD$;
(c) determinar as forças nas barras AE e HB e as reações em C e D.

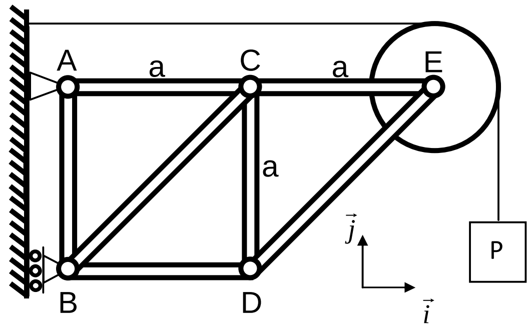


3ª Questão (**3,5 pontos**)

A treliça de sete barras indicada na figura é suportada por uma articulação no nó *A* e por um apoio simples no nó *B*. No nó *E*, a treliça está articulada a uma polia de raio *R* e massa desprezível, que sustenta um peso *P*.

Pede-se:

a) Os esforços que a polia exerce sobre a treliça
b) As reações vinculares em *A* e *B*
c) As forças nas barras *AC* e *BD*, indicando se são de tração ou de compressão



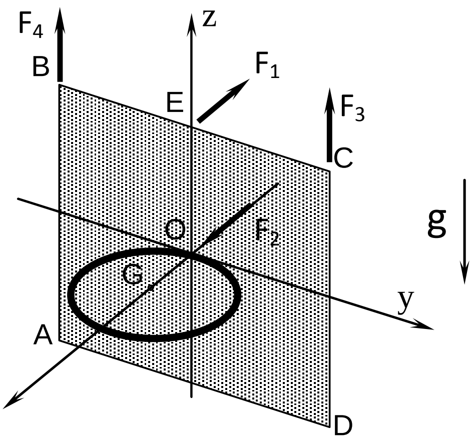
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

1ª Questão (**3,0 pontos**)

No sistema mostrado na figura, a placa quadrada *ABCD* está posicionada no plano *yz* e possui massa *2m/3*. Cada lado da placa mede *2a* e as distâncias BE e OE valem *a*. *A* placa está soldada no ponto *O* a um aro no plano *xy*, de raio *R*, centro *G* e massa *m/3*. Sobre a placa agem as forças $(\vec{F}_1, E)$, $(\vec{F}_2, O)$, $(\vec{F}_3, C)$ e $(\vec{F}_4, B)$, em que $\vec{F}_1 = -F\vec{i}$, $\vec{F}_2 = Q\vec{i}$, $\vec{F}_3 = mg/2\vec{k}$ e $\vec{F}_4 = mg/2\vec{k}$. Pede-se:



a) As coordenadas do baricentro do conjunto, considerando o sistema *Oxyz*.
b) A relação entre as constantes dadas (*P*, *F*, *Q*, *a* e *R*) para que o sistema de forças seja redutível a uma única força.
c) A relação entre as constantes dadas (*P*, *F*, *Q*, *a* e *R*) para que o sistema de forças não cause tendência de rotação em torno do eixo *Oy*.

$$x_G = \frac{2\,{}^{m}\!/_{3}\,(0) + {}^{m}\!/_{3}\,(R)}{2\,{}^{m}\!/_{3} + {}^{m}\!/_{3}} \Rightarrow \boxed{x_G = {}^{R}\!/_{3}}$$

Pela simetria em relação ao plano Oxz $\boxed{y_G = 0}$ e pela simetria em relação ao plano Oxy $\boxed{z_G = 0}$.

Calculando a resultante do sistema de forças:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = (-F + Q)\vec{i} + \left({}^{mg}\!/_{2} + {}^{mg}\!/_{2} - {}^{2mg}\!/_{3} - {}^{mg}\!/_{3}\right)\vec{k} \Rightarrow \boxed{\vec{R} = (Q - F)\vec{i}}$$

Calculando o momento do sistema de forças em relação aos eixos Ox, Oy e Oz:

$$M_{Ox} = 0 \quad ; \quad M_{Oy} = \frac{mg}{3}R - Fa \quad ; \quad M_{Oz} = 0, \text{ logo } \boxed{\vec{M}_O = \left(\frac{mg}{3}R - Fa\right)\vec{j}}$$

Para que o sistema de forças seja redutível a apenas uma força, devemos ter $\boxed{F \neq Q}$ e o invariante escalar $I = \vec{M}_O \cdot \vec{R}$ deve ser igual a zero, o que de fato é satisfeito para qualquer relação entre as constantes dadas.

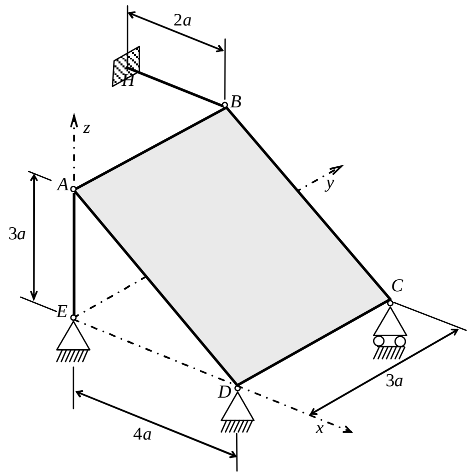
Para que o sistema de forças não cause tendência a rotação em torno do eixo Oy devemos ter $M_{Oy} = 0$. Logo é necessário e suficiente que $\boxed{\frac{mg}{3}R = Fa}$.

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

2ª Questão (3,5 pontos)



Na figura ao lado, a barra bi-articulada HB tem peso P, a barra bi-articulada AE tem peso desprezível e a placa retangular, articulada nos pontos A, B e D e vinculada ao apoio simples em C, tem peso $2P$.

Pede-se:

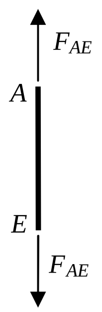
(a) esboçar os diagramas de corpo livre das barras AE e HB;

(b) esboçar o diagrama de corpo livre da placa $ABCD$;

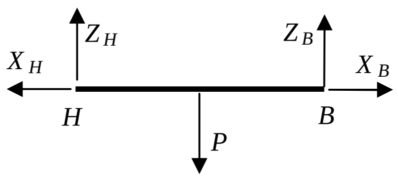
(c) determinar as forças nas barras AE e HB e as reações em C e D.

RESOLUÇÃO 1.

A barra AE está em equilíbrio sob a ação de apenas duas forças. Logo, o seu diagrama de corpo livre é o da figura a seguir:



A barra HB está em equilíbrio sob a ação de apenas três forças. Logo, elas são necessariamente coplanares, atuando no plano definido pelos pontos H e B e pela direção z da força peso. O diagrama de corpo livre dessa barra é apresentado a seguir:

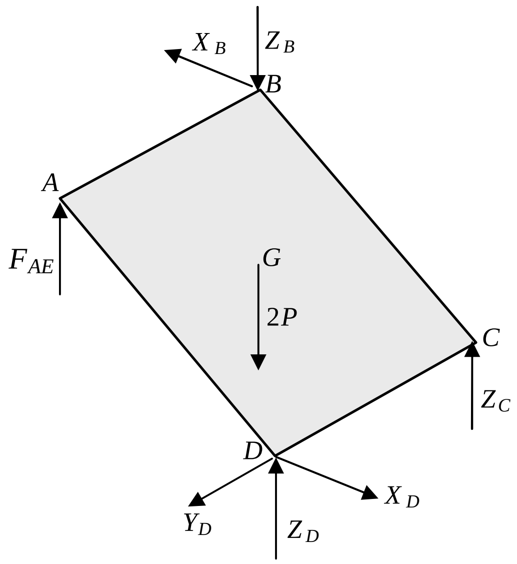


O diagrama de corpo livre da placa $ABCD$ é apresentado a seguir:

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica



Aplicando-se as equações da Estática ao equilíbrio da barra HB, tem-se:

$-X_H + X_B = 0$ (1)
$Z_H - P + Z_B = 0$ (2)
$Z_B \cdot 2a - P \cdot a = 0$ (3)

De (3), resulta:

$$Z_B = \frac{P}{2}$$

Substituindo-se $Z_B = \frac{P}{2}$ em (3), resulta:

$$Z_H = \frac{P}{2}$$

Aplicando-se as equações da Estática ao equilíbrio da placa $ABCD$, tem-se:

$\overline{R} = \vec{0}$,
logo:

$-X_B + X_D = 0$ (4)
$Y_D = 0$ (5)
$Z_D + F_{AE} + Z_C - Z_B - 2P = 0$ (6)

$\vec{M}_D = \vec{0}$,
logo:

$$(A-D)\wedge F_{AE}\vec{k} + (C-D)\wedge Z_C\vec{k} + (G-D)\wedge\left(-2P\vec{k}\right) + (B-D)\wedge\left(-X_B\vec{i} - Z_B\vec{k}\right) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \left(-4a\vec{i} + 3a\vec{k}\right)\wedge F_{AE}\vec{k} + \left(3a\vec{j}\right)\wedge Z_C\vec{k} + \left(-2a\vec{i} + \frac{3a}{2}\vec{j} + \frac{3a}{2}\vec{k}\right)\wedge\left(-2P\vec{k}\right) + \left(-4a\vec{i} + 3a\vec{j} + 3a\vec{k}\right)\wedge\left(-X_B\vec{i} - Z_B\vec{k}\right) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow 4aF_{AE}\vec{j} + 3aZ_C\vec{i} - 4aP\vec{j} - 3aP\vec{i} - 4aZ_B\vec{j} + 3aX_B\vec{k} - 3aZ_B\vec{i} - 3aX_B\vec{j} = \vec{0}$$

Da equação vetorial acima, resultam:

$$Z_C - P - Z_B = 0 \qquad (7)$$
$$4F_{AE} - 4P - 4Z_B - 3X_B = 0 \qquad (8)$$
$$X_B = 0 \qquad (9)$$

Substituindo-se $Z_B = \frac{P}{2}$ em (7), resulta:

$$Z_C - P - \frac{P}{2} = 0 \Rightarrow Z_C = \frac{3P}{2}$$

Substituindo-se (9) em (1), resulta:

$$-X_H + 0 = 0 \Rightarrow X_H = 0$$

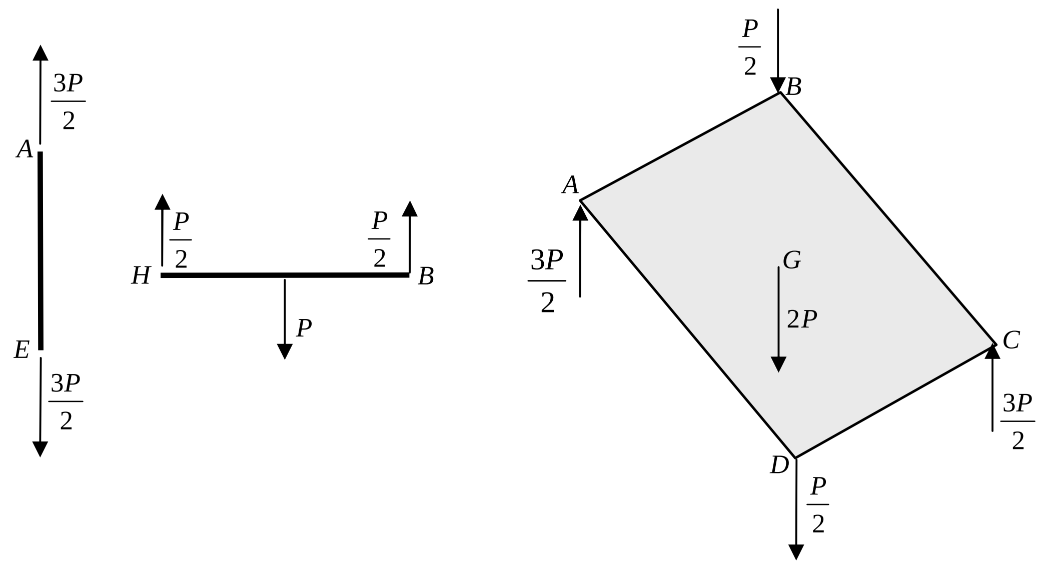
Substituindo-se $Z_B = \frac{P}{2}$ e $X_B = 0$ em (8), resulta:

$$4F_{AE} - 4P - 4\frac{P}{2} - 3\cdot 0 = 0 \Rightarrow F_{AE} = \frac{3P}{2}$$

Substituindo-se $F_{AE} = \frac{3P}{2}$, $Z_C = \frac{3P}{2}$, $Z_B = \frac{P}{2}$ em (6), resulta:

$$Z_D + \frac{3P}{2} + \frac{3P}{2} - \frac{P}{2} - 2P = 0 \Rightarrow Z_D = -\frac{P}{2}$$

Utilizando-se os resultados anteriores, redesenham-se os diagramas de corpo livre das barras e da placa nas figuras a seguir.

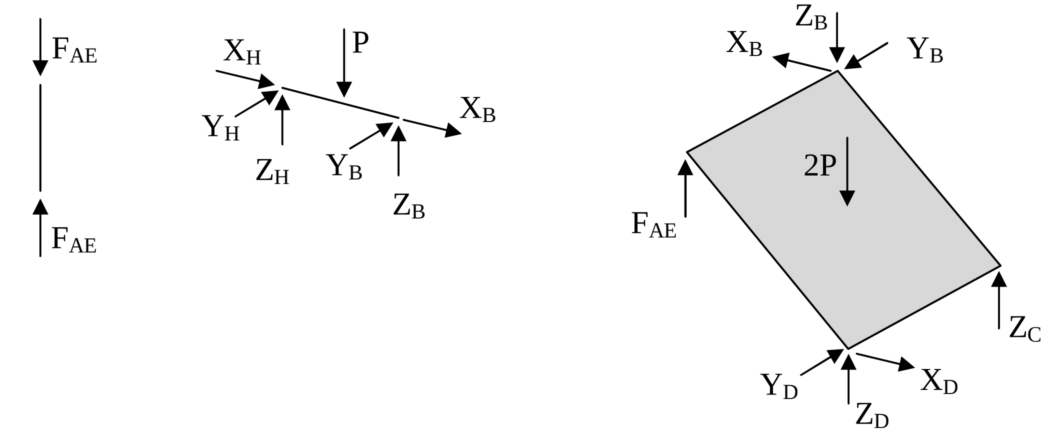


ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

RESOLUÇÃO 2.



Do equilíbrio da barra HB:

$\sum F_x = 0 \therefore X_H + X_B = 0$ (1)

$\sum F_y = 0 \therefore Y_H + Y_B = 0$ (2)

$\sum F_z = 0 \therefore Z_H + Z_B = P$ (3)

$\sum M_{Hx} = 0 \therefore 0 = 0$ (4)

$\sum M_{Hy} = 0 \therefore Z_B \cdot 2a = P \cdot a \Rightarrow \boxed{Z_B = P/2}$ (5), e substituindo em (3): $\boxed{Z_H = P/2}$

$\sum M_{Hz} = 0 \therefore \boxed{Y_B = 0}$ (6), e substituindo em (2): $\boxed{Y_H = 0}$

Do equilíbrio da placa:

$\sum F_x = 0 \therefore X_D - X_B = 0$ (7)

$\sum F_y = 0 \therefore Y_D - Y_B = 0$ (8), e substituindo $Y_B = 0$ aqui: $\boxed{Y_D = 0}$

$\sum F_z = 0 \therefore Z_D + Z_C - Z_B + F_{AE} = 2P$ (9)

$\sum M_{Dx} = 0 \therefore Z_C \cdot 3a + Y_B \cdot 4a = 2P \cdot (3a/2) + Z_B \cdot 3a$ (10), e substituindo $Y_B = 0$ e $Z_B = P/2$ aqui, resulta $\boxed{Z_C = 3P/2}$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

$$\sum M_{Dy} = 0 \therefore F_{AE} \cdot 4a - X_B \cdot 3a - Z_B \cdot 4a = 2P \cdot 2a \qquad (11)$$

$\sum M_{Dz} = 0 \therefore Y_B \cdot 4a + X_B \cdot 4a = 0$ (12), e substituindo $Y_B = 0$ aqui: $\boxed{X_B = 0}$

Substituindo $X_B = 0$ em (7) e em (1): $\boxed{X_D = 0}$ e $\boxed{X_H = 0}$

Substituindo $X_B = 0$ e $Z_B = P/2$ em (11): $\boxed{F_{AE} = 3P/2}$

3ª Questão (**3,5 pontos**)

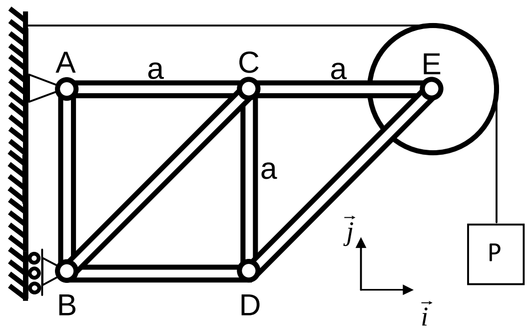
A treliça de sete barras indicada na figura é suportada por uma articulação no nó *A* e por um apoio simples no nó *B*. No nó *E*, a treliça está articulada a uma polia de raio *R* e massa desprezível, que sustenta um peso *P*.

Pede-se:

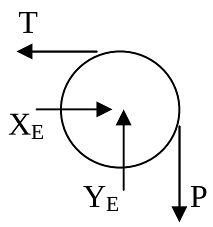
a) Os esforços que a polia exerce sobre a treliça

b) As reações vinculares em *A* e *B*

c) As forças nas barras *AC* e *BD*, indicando se são de tração ou de compressão



Do equilíbrio da polia:

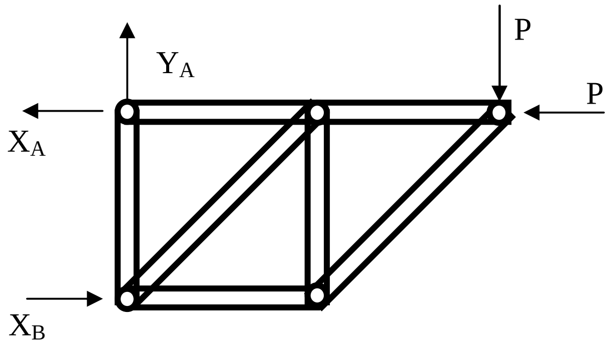


$$\sum F_x = 0 \therefore X_E = T$$
$$\sum F_y = 0 \therefore Y_E = P$$
$$\sum M_{zE} = 0 \therefore \boxed{T = P}$$

Resulta: $\boxed{X_E = P}$ e $\boxed{Y_E = P}$

As forças que a polia exerce sobre a treliça são os pares ação reação de X_E e Y_E respectivamente.

Do equilíbrio da treliça:



$$\sum F_x = 0 \therefore X_B - X_A - P = 0$$
$$\sum F_y = 0 \therefore \boxed{Y_A = P}$$
$$\sum M_{zA} = 0 \therefore X_B \cdot a = P \cdot 2a$$
$$\Rightarrow \boxed{X_B = 2P}\text{, e assim: } \boxed{X_A = P}$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

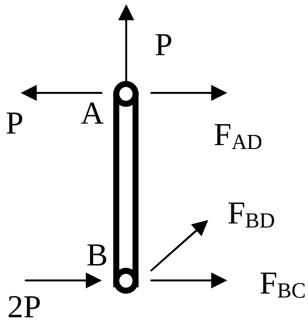
Departamento de Engenharia Mecânica

Para determinar as forças nas barras AC e BD iremos aplicar o método das seções, cortando a estrutura pelas barras AC, BC e BD e estudando o equilíbrio do lado esquerdo:

$$\sum F_x = 0 \therefore F_{AD} + F_{BC} + \frac{\sqrt{2}}{2} F_{BD} + P = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \therefore \frac{\sqrt{2}}{2} F_{BD} + P = 0 \Rightarrow \boxed{F_{BD} = -\sqrt{2}P} \text{ (compressão)}$$

$$\sum M_{zA} = 0 \therefore F_{AD} \cdot a = P \cdot a \Rightarrow \boxed{F_{AD} = P} \text{ (tração)}$$



Substituindo $F_{AD} = P$ e $F_{BD} = -\sqrt{2}P$ em (1):

$$F_{BC} = -F_{AD} - \frac{\sqrt{2}}{2} F_{BD} - P \Rightarrow \boxed{F_{BC} = -P} \text{ (compressão)}$$