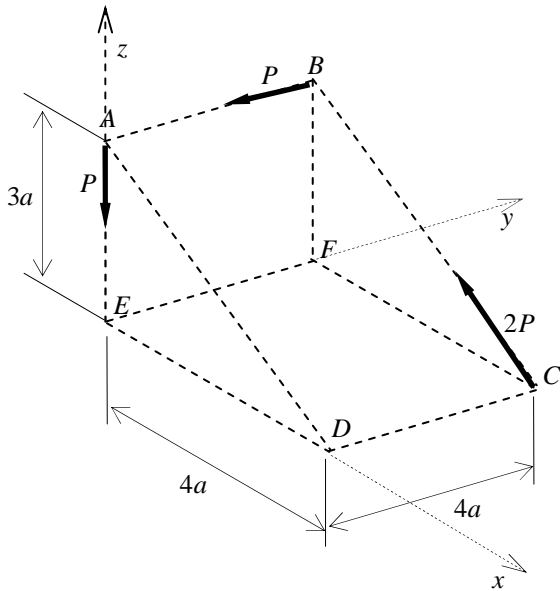




1 - Não é permitido o uso de dispositivos eletrônicos, como calculadoras, tablets e celulares.

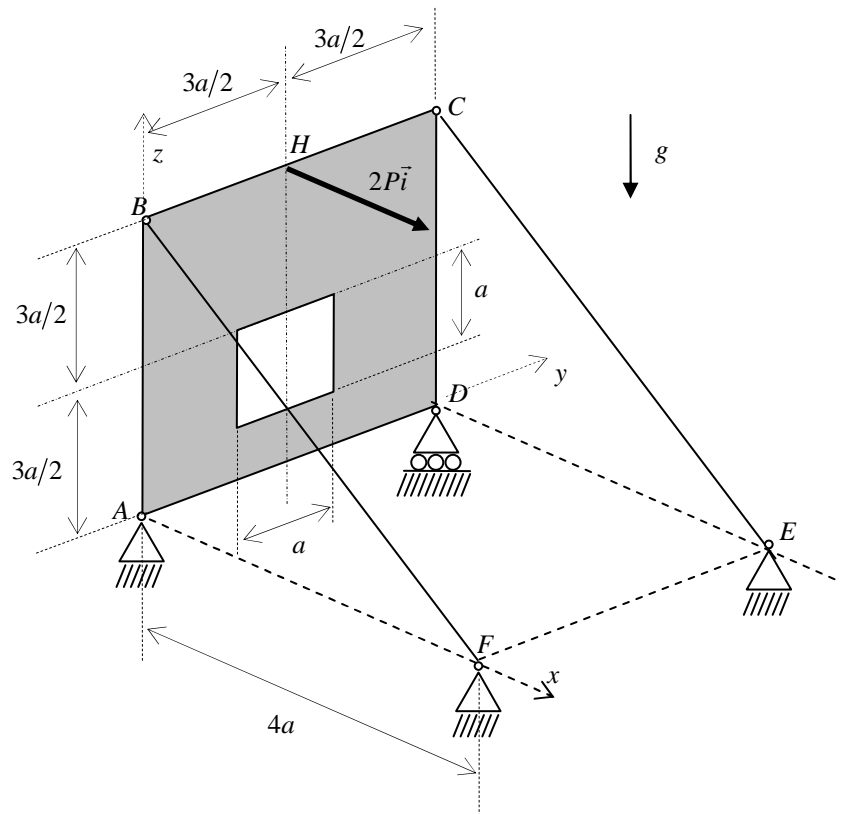


**QUESTÃO 2 (4,0 pontos).** Uma placa quadrada  $ABCD$ , de lado  $3a$  e exibindo uma abertura quadrada de lado  $a$ , possui peso  $P$  e mantém-se em equilíbrio vinculada aos apoios  $A$  e  $D$  e às barras  $CE$ , de peso  $P$ , e  $BF$ , de peso desprezível. No ponto  $H$  da placa aplica-se uma força horizontal  $P\vec{i}$ , conforme ilustrado na figura. Pedem-se:

- a posição do centro de massa da placa;
- os diagramas de corpo livre das barras  $BF$  e  $CE$  e da placa  $ABCD$ ;
- as reações nos apoios  $A$  e  $D$ ;
- as forças nas barras  $BF$  e  $CE$ .

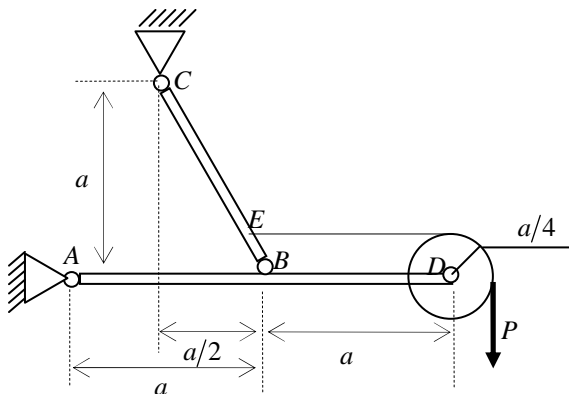
**QUESTÃO 1 (3,0 pontos).** Considerando o sistema de forças indicado na figura ao lado, realize as seguintes tarefas:

- calcule a resultante do sistema de forças e o momento resultante em relação ao pólo  $F$ ;
- calcule o momento resultante do sistema de forças em relação ao pólo  $D$ ;
- calcule o momento resultante do sistema de forças em relação ao eixo  $AC$ ;
- verifique se o sistema é redutível a uma única força;
- calcule o momento mínimo do sistema de forças.



**QUESTÃO 3 (3,0 pontos).** A estrutura ilustrada na figura ao lado é composta pelas barras  $AD$  e  $BC$ , de pesos desprezíveis. Em  $D$  localiza-se uma polia, de peso desprezível, que sustenta um peso  $P$  por meio de um cabo inextensível ligado ao ponto  $E$  da barra  $BC$ . Pedem-se:

- os diagramas de corpo livre das barras  $AD$  e  $BC$ ;
- as reações nas articulações  $A$  e  $C$ ;
- as forças nas barras  $AD$  e  $BC$ .





**RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 1**

A resultante do sistema de forças dado, é:

$$\vec{R} = -P\vec{k} - P\vec{j} - 2P \cdot \frac{4}{5}\vec{i} + 2P \cdot \frac{3}{5}\vec{k} = -\frac{8}{5}P\vec{i} - P\vec{j} + \frac{1}{5}P\vec{k}$$

$$\therefore \vec{R} = -\frac{8}{5}P\vec{i} - P\vec{j} + \frac{1}{5}P\vec{k}$$

**(0,5 ponto)**

O momento resultante do sistema de forças dado, relativamente ao pólo  $F$ , é:

$$\vec{M}_F = (A-F) \wedge (-P\vec{k}) + (B-F) \wedge (-P\vec{j}) + (C-F) \wedge \left(-\frac{8}{5}P\vec{i} + \frac{6}{5}P\vec{k}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{M}_F = (-4a\vec{j} + 3a\vec{k}) \wedge (-P\vec{k}) + 3a\vec{k} \wedge (-P\vec{j}) + 4a\vec{i} \wedge \left(-\frac{8}{5}P\vec{i} + \frac{6}{5}P\vec{k}\right)$$

$$\therefore \vec{M}_F = 7aP\vec{i} - \frac{24}{5}aP\vec{j}$$

**(0,5 ponto)**

Como as três forças dadas concorrem sobre o eixo  $AC$ , o momento dessas forças relativamente a esse eixo é nulo:

$$M_{AC} = 0$$

**(0,5 ponto)**

O invariante escalar do sistema de forças dado é:

$$I = \vec{R} \cdot \vec{M}_F = \left(-\frac{8}{5}P\vec{i} - P\vec{j} + \frac{1}{5}P\vec{k}\right) \cdot \left(7aP\vec{i} - \frac{24}{5}aP\vec{j}\right) = -\frac{56}{5}aP^2 + \frac{24}{5}aP^2$$

$$\therefore I = -\frac{32}{5}aP^2$$

Como  $I \neq 0$ , conclui-se que o sistema de forças dado não é redutível a uma única força.

**(1,0 ponto)**

O momento mínimo do sistema de forças dado, é:

$$\vec{M}_{\min} = \left(\vec{M}_F \cdot \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}\right) \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} = \frac{I}{|\vec{R}|^2} \vec{R} = -\frac{32}{5}aP^2 \cdot \frac{1}{\frac{64}{25} + 1 + \frac{1}{25}} \left(-\frac{8}{5}P\vec{i} - P\vec{j} + \frac{1}{5}P\vec{k}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{M}_{\min} = -\frac{32}{5}aP^2 \cdot \frac{25}{90} \left(-\frac{8}{5}P\vec{i} - P\vec{j} + \frac{1}{5}P\vec{k}\right)$$

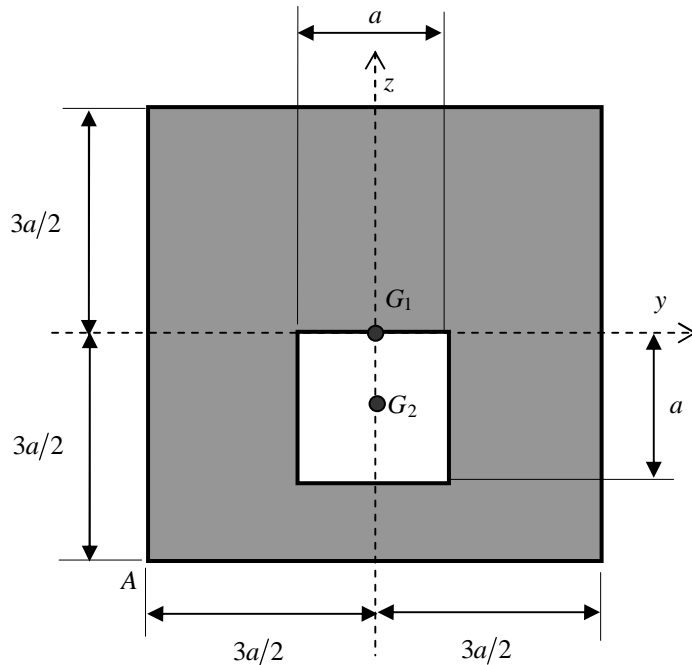
$$\therefore \vec{M}_{\min} = \frac{16}{9}aP^2 \left(\frac{8}{5}P\vec{i} + P\vec{j} - \frac{1}{5}P\vec{k}\right)$$

**(0,5 ponto)**



RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 2

De acordo com a figura abaixo, a coordenada  $z_G$  do centro de massa da placa, é dada por:



$$z_G = \frac{m_1 z_{G1} - m_2 z_{G2}}{m_1 - m_2}$$
$$\Rightarrow z_G = \frac{9a^2 \cdot 0 - a^2 \cdot (-a/2)}{9a^2 - a^2}$$

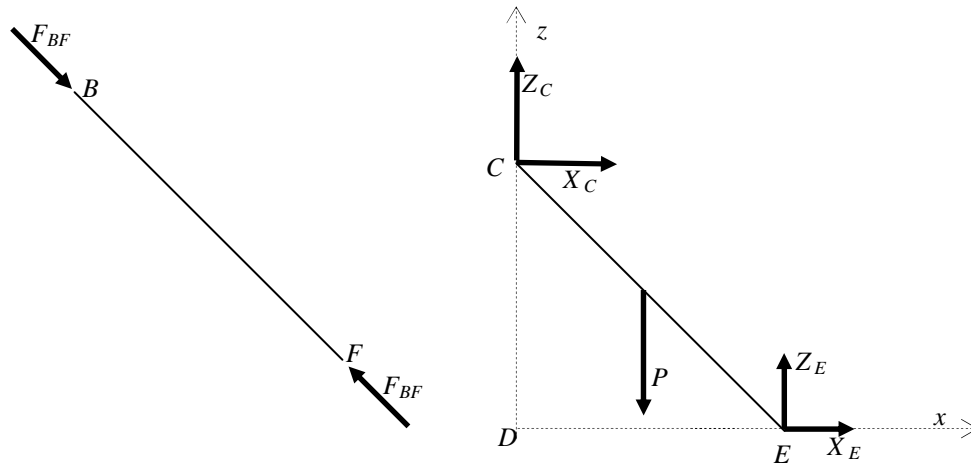
$$\therefore z_G = \frac{a}{16}$$

Como a peça é simétrica em relação ao eixo  $z$  e a origem do sistema de referência coincide com o vértice  $A$ , o seu centro de massa se localiza em

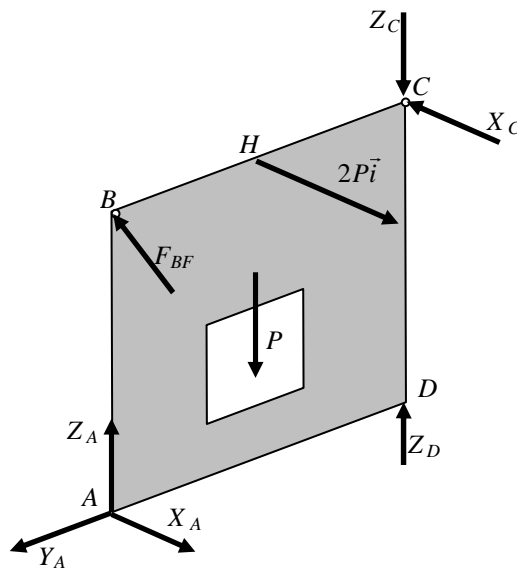
$$G = \left( 0, \frac{3a}{2}, \frac{3a}{2} + \frac{a}{16} \right) = \left( 0, \frac{3a}{2}, \frac{25a}{16} \right).$$

(0,5 ponto)

Os diagramas de corpo livre das barras são apresentados na figura abaixo. Notemos que as barras  $CE$  e  $BF$  estão em equilíbrio sujeitas, respectivamente, a três e a duas forças. Portanto, no primeiro caso (barra  $CE$ ) essas forças são coplanares enquanto que no segundo (barra  $BF$ ), têm mesma magnitude, mesma linha de ação e sentidos opostos.



O diagrama de corpo livre da placa  $ABCD$  é apresentado na figura a seguir:



(1,5 pontos)

Do equilíbrio da barra  $CE$  obtêm-se as seguintes equações:

$$X_C + X_E = 0 \quad (1)$$

$$Z_C + Z_E - P = 0 \quad (2)$$

$$-Z_C 4a - X_C 3a + P 2a = 0 \Rightarrow 4Z_C + 3X_C = 2P \quad (3)$$

(0,5 ponto)

Do equilíbrio das placa  $ABCD$ , obtêm-se as seguintes equações:



# ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

## Departamento de Engenharia Mecânica

$$-X_C + X_A + 2P - F_{BF} \frac{4}{5} = 0 \Rightarrow -5X_C + 5X_A + 10P - 4F_{BF} = 0 \quad (4)$$

$$Y_A = 0 \quad (5)$$

$$-Z_C + Z_D + Z_A - P + F_{BF} \frac{3}{5} = 0 \Rightarrow -5Z_C + 5Z_D + 5Z_A - 5P + 3F_{BF} = 0 \quad (6)$$

(0,5 ponto)

$$\begin{aligned} \sum \vec{M}_A = \vec{0} &\Rightarrow (B-A) \wedge \vec{F}_{BF} + (G-A) \wedge (-P\vec{k}) + (H-A) \wedge 2P\vec{i} + (D-A) \wedge Z_D\vec{k} + (C-A) \wedge (-X_C\vec{i} - Z_C\vec{k}) = \vec{0} \\ &\Rightarrow 3a\vec{k} \wedge \left( -F_{BF} \frac{4}{5}\vec{i} + F_{BF} \frac{3}{5}\vec{k} \right) + \left( \frac{3a}{2}\vec{j} + \frac{25a}{16}\vec{k} \right) \wedge (-P\vec{k}) + \left( \frac{3a}{2}\vec{j} + 3a\vec{k} \right) \wedge 2P\vec{i} + 3a\vec{j} \wedge Z_D\vec{k} + (3a\vec{j} + 3a\vec{k}) \wedge (-X_C\vec{i} - Z_C\vec{k}) = \vec{0} \\ &\Rightarrow -\frac{12}{5}F_{BF}a\vec{j} - \frac{3a}{2}P\vec{i} - 3aP\vec{k} + 6aP\vec{j} + 3aZ_D\vec{i} + 3aX_C\vec{k} - 3aZ_C\vec{i} - 3aX_C\vec{j} = \vec{0} \end{aligned}$$

(0,5 ponto)

A equação vetorial acima dá origem às três equações escalares a seguir:

$$-P + 2Z_D - 2Z_C = 0 \quad (7)$$

$$-4F_{BF} + 10P - 5X_C = 0 \quad (8)$$

$$-P + X_C = 0 \quad (9)$$

Resolvendo-se o sistema de equações (1-9), obtêm-se:

$$X_A = 0, Y_A = 0, Z_A = -\frac{P}{4}$$

$$Z_D = \frac{P}{4}$$

$$F_{BF} = \frac{5P}{4}$$

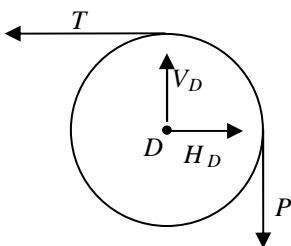
$$X_C = P, Z_C = -\frac{P}{4}$$

$$X_E = -P, Z_E = \frac{5P}{4}$$

(0,5 ponto)

### RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 3

Do equilíbrio da polia, obtêm-se as componentes da reação em  $D$  bem como a força de tração no cabo, ou seja:



$$T = P$$

$$H_D = P$$

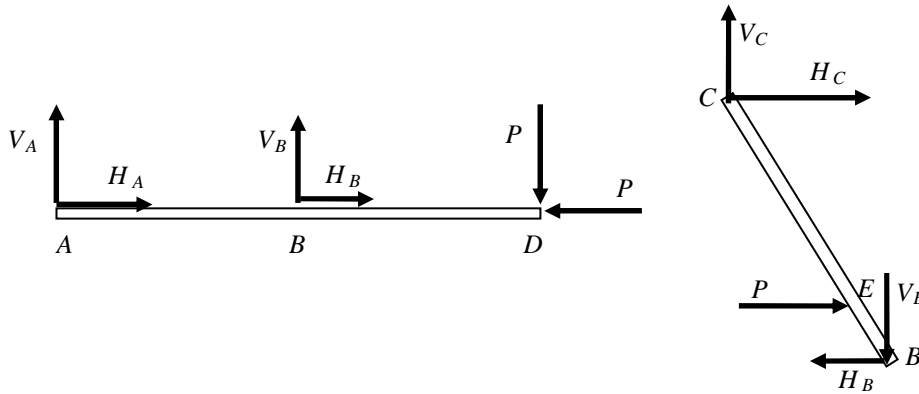
$$V_D = P$$



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
Departamento de Engenharia Mecânica

(0,5 ponto)

Os diagramas de corpo livre das barras  $AD$  e  $BC$  são apresentados na figura a seguir:



(1,0 ponto)

As condições de equilíbrio da barra  $AD$  são expressas pelas equações (1-3), a seguir:

$$H_A + H_B - P = 0 \quad (1)$$

$$V_A + V_B - P = 0 \quad (2)$$

$$V_B \cdot a - P \cdot 2a = 0 \quad (3)$$

(0,5 ponto)

Do equilíbrio da barra  $BC$  resultam as seguintes equações:

$$H_C - H_B + P = 0 \quad (4)$$

$$V_C - V_B = 0 \quad (5)$$

$$-H_B \cdot a - V_B \cdot \frac{a}{2} + P \cdot \frac{3a}{4} = 0 \quad (6)$$

(0,5 ponto)

Resolvendo-se o sistema de equações 1-6, acima, obtêm-se:

$$V_B = 2P,$$

$$V_A = -P,$$

$$V_C = 2P,$$

$$H_B = -\frac{P}{4}$$

$$H_C = \frac{5P}{4}$$

$$H_A = \frac{5P}{4}$$

(0,5 ponto)