ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

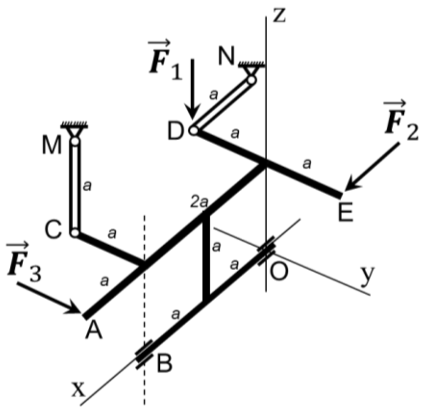
Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA I – Prova 1 – 4 de Outubro de 2022

Duração da Prova: 120 minutos (Início: 10:00 – Término: 12:00)
Não é permitido o uso de dispositivos eletrônicos.

1ª Questão (3,5 pontos). A peça $OBACDE$ mostrada na figura mantém-se em equilíbrio apoiada nos anéis O e B e articulada às barras MC e ND, sendo a barra MC paralela ao eixo Oz e a barra ND paralela ao eixo Ox. Os vínculos em C, D, N e M são articulações ideais e os pesos da peça e das barras MC e ND são desprezíveis. Sobre o sistema são aplicadas as forças $(\vec{F}_1, D)$, com $\vec{F}_1 = -P\vec{k}$; $(\vec{F}_2, E)$, com $\vec{F}_2 = P\vec{i}$ e $(\vec{F}_3, A)$, com $\vec{F}_3 = P\vec{j}$.



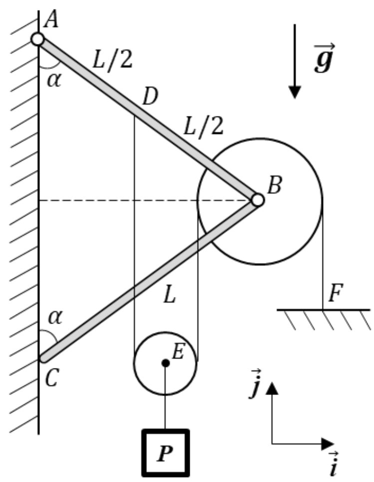
Parte 1 – Considerando **<u>unicamente o sistema composto pelas forças ativas</u>** $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$:

a) Calcular a resultante do sistema de forças ativas.
b) Calcular o momento em relação ao polo E.
c) Verificar, justificando sua resposta, se o sistema de forças ativas é redutível a uma única força.
d) Calcular o valor do momento mínimo.

Parte 2 – Considerando todo o sistema:

e) Fazer o diagrama de corpo livre da peça $OBACDE$.
f) Calcular as reações vinculares nos pontos B, M, N e O.

2ª Questão (3,5 pontos). O sistema ilustrado na figura é constituído pelas barras homogêneas AB e BC, e pelas polias ideais de centros B e E. As barras e as polias possuem massas desprezíveis. Um bloco de peso P é pendurado à polia E, que por sua vez é mantida suspensa por meio de um cabo inextensível ideal ligado à barra AB e à polia B. A polia B é articulada às barras e o fio na extremidade direita dessa polia está fixado ao piso horizontal em F. A barra AB é articulada em A e a barra BC apoia-se em uma parede rugosa em C, sendo μ o coeficiente de atrito estático no contato. Admitindo que todas as articulações são ideais e que o sistema está em equilíbrio, pedem-se:



a) Os diagramas de corpo livre das barras AB e BC e das polias B e E.
b) O valor da tração no fio em F.
c) As forças atuantes nas barras AB e BC.
d) O valor mínimo de μ compatível com o equilíbrio.

3ª Questão (3,0 pontos). O ponto P move-se com lei horária $\theta(t) = \pi t/2$ ao longo da curva plana descrita pela equação paramétrica:

$$\begin{cases} x(\theta) = R\theta - R\sin\theta \\ y(\theta) = -R + R\cos\theta \end{cases}, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Determinar, para o instante $t = 1s$:

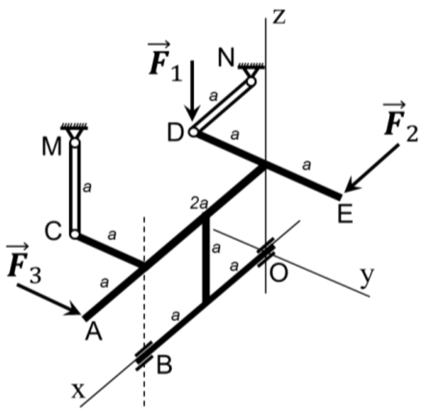
a) A velocidade de P descrita em coordenadas cartesianas.
b) A aceleração de P descrita em coordenadas cartesianas.
c) O versor tangente do triedro de Frenet.
d) A velocidade de P descrita em coordenadas intrínsecas.
e) A aceleração de P descrita em coordenadas intrínsecas.

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

1ª Questão (3,5 pontos). A peça $OBACDE$ mostrada na figura mantém-se em equilíbrio apoiada nos anéis O e B e articulada às barras MC e ND, sendo a barra MC paralela ao eixo Oz e a barra ND paralela ao eixo Ox. Os vínculos em C, D, N e M são articulações ideais e os pesos da peça e das barras MC e ND são desprezíveis. Sobre o sistema são aplicadas as forças $(\vec{\boldsymbol{F}}_1, D)$, com $\vec{\boldsymbol{F}}_1 = -P\vec{\mathbf{k}}$; $(\vec{\boldsymbol{F}}_2, E)$, com $\vec{\boldsymbol{F}}_2 = P\vec{\mathbf{i}}$ e $(\vec{\boldsymbol{F}}_3, A)$, com $\vec{\boldsymbol{F}}_3 = P\vec{\mathbf{j}}$.



Parte 1 – Considerando **unicamente o sistema composto pelas forças ativas** $\vec{\boldsymbol{F}}_1$, $\vec{\boldsymbol{F}}_2$ e $\vec{\boldsymbol{F}}_3$:

a) Calcular a resultante do sistema de forças ativas.
b) Calcular o momento em relação ao polo E.
c) Verificar, justificando sua resposta, se o sistema de forças ativas é redutível a uma única força.
d) Calcular o valor do momento mínimo.

Parte 2 – Considerando todo o sistema:

e) Fazer o diagrama de corpo livre da peça $OBACDE$.
f) Calcular as reações vinculares nos pontos B, M, N e O.

RESOLUÇÃO

Parte 1

a) $\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{F}}_1 + \vec{\boldsymbol{F}}_2 + \vec{\boldsymbol{F}}_3 = P\vec{\mathbf{i}} + P\vec{\mathbf{j}} - P\vec{\mathbf{k}}$ **(0,5 ponto)**

b) $\vec{\boldsymbol{M}}_E = (D - E) \wedge \vec{\boldsymbol{F}}_1 + (E - E) \wedge \vec{\boldsymbol{F}}_2 + (A - E) \wedge \vec{\boldsymbol{F}}_3$

$\Rightarrow \vec{\boldsymbol{M}}_E = (-2a\vec{\mathbf{j}}) \wedge -P\vec{\mathbf{k}} + \vec{\mathbf{0}} + (3a\vec{\mathbf{i}} - a\vec{\mathbf{j}}) \wedge P\vec{\mathbf{j}}$

$\Rightarrow \vec{\boldsymbol{M}}_E = 2aP\vec{\mathbf{i}} + 3aP\vec{\mathbf{k}}$ **(0,5 ponto)**

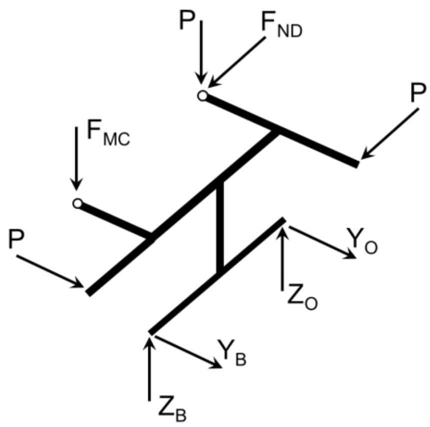
c) Invariante escalar $I = \vec{\boldsymbol{M}}_E \cdot \vec{\boldsymbol{R}} = 2aP^2 - 3aP^2$, portanto $I = -aP^2 \neq 0$. O sistema não pode ser reduzido a uma força **(0,5 ponto)**

d) $\vec{\boldsymbol{M}}_{min} = \frac{I}{|\vec{\boldsymbol{R}}|^2}\vec{\boldsymbol{R}} = \frac{-aP^2}{3P^2}\left(P\vec{\mathbf{i}} + P\vec{\mathbf{j}} - P\vec{\mathbf{k}}\right) \Rightarrow \vec{\boldsymbol{M}}_{min} = \frac{-aP}{3}\left(\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}} - \vec{\mathbf{k}}\right)$

(0,5 ponto)

Parte 2

e) Veja diagrama de corpo livre ao lado. **(1,0 ponto)**



f) Equações de equilíbrio:

$$\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\mathbf{0}} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = P + F_{ND} = 0 \\ \sum F_y = Y_O + Y_B + P = 0 \\ \sum F_z = Z_O + Z_B - P - F_{MC} = 0 \end{cases} \qquad \vec{\boldsymbol{M}}_O = \vec{\mathbf{0}} \Rightarrow \begin{cases} M_{Ox} = Pa + F_{MC}a - Pa = 0 \\ M_{Oy} = Pa + F_{ND}a - 2Z_B a + 2F_{MC}a = 0 \\ M_{Oz} = -Pa + F_{ND}a + 2Y_B a + 3Pa = 0 \end{cases}$$

(0,5 ponto)

Resolvendo o sistema linear de equações para as variáveis $(Y_O, Z_O, Y_B, Z_B, F_{ND}, F_{MC})$, obtêm-se:

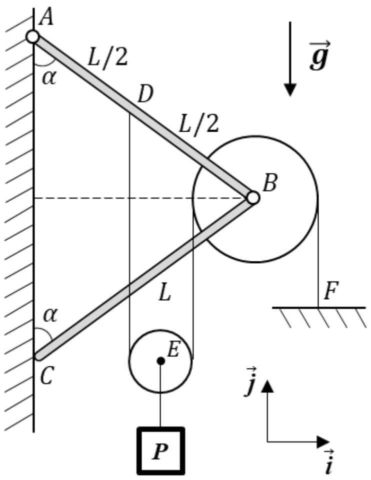
$$Y_O = \frac{-P}{2} \qquad Y_B = \frac{-P}{2} \qquad F_{ND} = -P \qquad Z_O = P \qquad Z_B = 0 \qquad F_{MC} = 0$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

2ª Questão (3,5 pontos). O sistema ilustrado na figura é constituído pelas barras homogêneas AB e BC, e pelas polias ideais de centros B e E. As barras e as polias possuem massas desprezíveis. Um bloco de peso P é pendurado à polia E, que por sua vez é mantida suspensa por meio de um cabo inextensível ideal ligado à barra AB e à polia B. A polia B é articulada às barras e o fio na extremidade direita dessa polia está fixado ao piso horizontal em F. A barra AB é articulada em A e a barra BC apoia-se em uma parede rugosa em C, sendo μ o coeficiente de atrito estático no contato. Admitindo que todas as articulações são ideais e que o sistema está em equilíbrio, pedem-se:

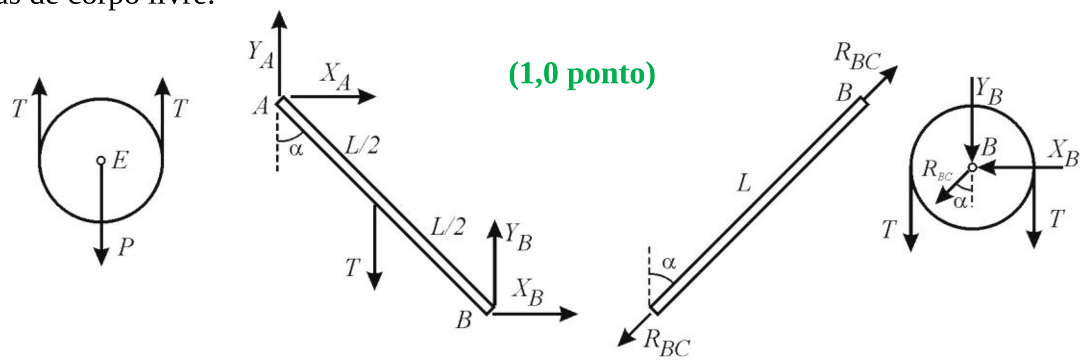


a) Os diagramas de corpo livre das barras AB e BC e das polias B e E.
b) O valor da tração no fio em F.
c) As forças atuantes nas barras AB e BC.
d) O valor mínimo de μ compatível com o equilíbrio.

RESOLUÇÃO

a) Diagramas de corpo livre:

(1,0 ponto)



b) O valor da tração no fio em F:

(0,5 ponto)

Equilíbrio da polia E: $T = P/2$

c) As forças atuantes nas barras AB e BC.

Equações de equilíbrio da polia B: $\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{0}} \Rightarrow \begin{cases} -X_B - R_{BC}\sin\alpha = 0 & (1) \\ -Y_B - R_{BC}\cos\alpha - 2T = 0 & (2) \end{cases}$

Equações de equilíbrio da barra AB:

$$\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{0}} \Rightarrow \begin{cases} X_A + X_B = 0 & (3) \\ Y_A + Y_B - T = 0 & (4) \end{cases}$$

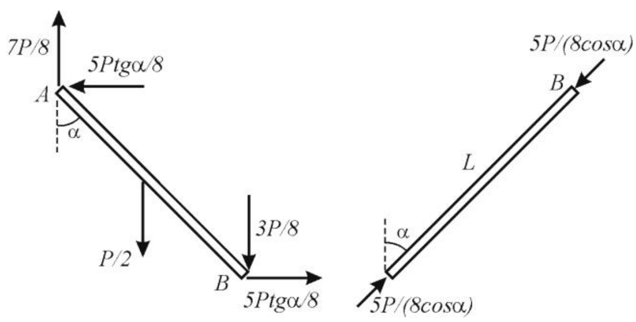
(1,0 ponto)

$$\vec{\boldsymbol{M}}_A = \vec{\boldsymbol{0}} \Rightarrow \left\{ -\frac{TL}{2}\text{sen}\alpha + Y_B L\text{sen}\alpha + X_B L\cos\alpha = 0 \quad (5) \right.$$

Resolvendo o sistema linear de equações (1)-(5) para as variáveis $(R_{BC}, X_A, Y_A, X_B, Y_B)$, obtêm-se:

$R_{BC} = -\frac{5P}{8\cos\alpha}$ (compressão), $X_A = -\frac{5P\tan\alpha}{8}$, $Y_A = \frac{7P}{8}$,

$X_B = \frac{5P\tan\alpha}{8}$, $Y_B = -\frac{3P}{8}$



d) O valor mínimo de μ compatível com o equilíbrio:

$$|F_{at}| \leq \mu|N| \Rightarrow |R_{BC}|\cos\alpha \leq \mu|R_{BC}|\sin\alpha \Rightarrow \mu \geq \frac{1}{\tan\alpha}$$

(1,0 ponto)

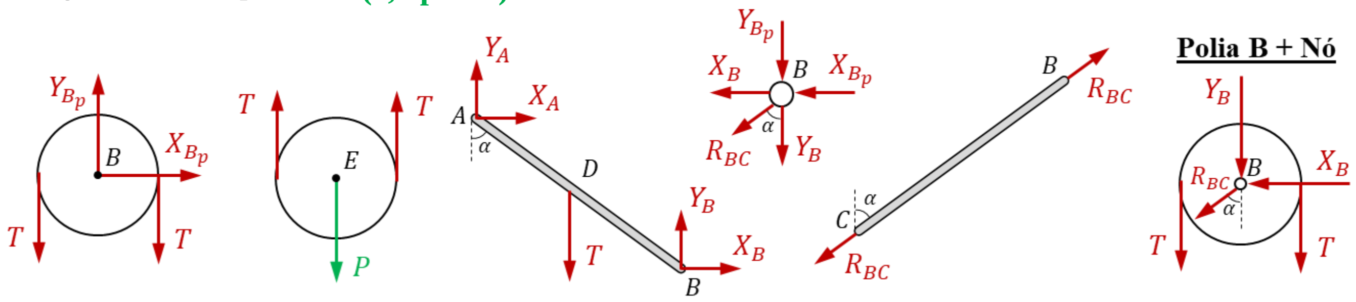
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

RESOLUÇÃO ALTERNATIVA

a) Diagramas de corpo livre: **(1,0 ponto)**



b) O valor da tração no fio em F:

Equilíbrio da polia E: $T = P/2$ **(0,5 ponto)**

Equilíbrio da polia B: $X_{B_p} = 0$, $Y_{B_p} = P$

c) As forças atuantes nas barras AB e BC.

Equações de equilíbrio do nó B:

$$\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{0}} \Rightarrow \begin{cases} -X_{B_p} - X_B - R_{BC}\text{sin}\alpha = 0 & (1) \\ -Y_{B_p} - Y_B - R_{BC}\text{cos}\alpha = 0 & (2) \end{cases}$$

Equações de equilíbrio da barra AB: **(1,0 ponto)**

$$\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{0}} \Rightarrow \begin{cases} X_A + X_B = 0 & (3) \\ Y_A + Y_B - T = 0 & (4) \end{cases}$$

$$\vec{\boldsymbol{M}}_A = \vec{\boldsymbol{0}} \Rightarrow \left\{ -\frac{TL}{2}\text{sen}\alpha + Y_B L\text{sen}\alpha + X_B L\text{cos}\alpha = 0 \quad (5) \right.$$

Resolvendo o sistema linear de equações (1)-(5) para as variáveis $(R_{BC}, X_A, Y_A, X_B, Y_B)$, obtêm-se:

$$R_{BC} = -\frac{5P}{8\text{cos}\alpha} \text{ (compressão)}, \quad X_A = -\frac{5P\text{tan}\alpha}{8}, \quad Y_A = \frac{7P}{8}, \quad X_B = \frac{5P\text{tan}\alpha}{8}, \quad Y_B = -\frac{3P}{8}$$

d) O valor mínimo de μ compatível com o equilíbrio:

$$|F_{at}| \le \mu|N| \Rightarrow |R_{BC}|\text{cos}\alpha \le \mu|R_{BC}|\text{cos}\alpha \Rightarrow \mu \ge \frac{1}{\text{tan}\alpha}$$ **(1,0 ponto)**

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

3ª Questão (3,0 pontos). O ponto P move-se com lei horária $\theta(t) = \pi t/2$ ao longo da curva plana descrita pela equação paramétrica:

$$\begin{cases} x(\theta) = R\theta - R\sin\theta \\ y(\theta) = -R + R\cos\theta \end{cases}, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Determinar, para o instante $t = 1s$:

a) A velocidade de P descrita em coordenadas cartesianas.
b) A aceleração de P descrita em coordenadas cartesianas.
c) O versor tangente do triedro de Frenet.
d) A velocidade de P descrita em coordenadas intrínsecas.
e) A aceleração de P descrita em coordenadas intrínsecas.

RESOLUÇÃO

a) Velocidade de P em coordenadas cartesianas:

$$\vec{\boldsymbol{v}}_P = \frac{dx}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\vec{\mathbf{i}} + \frac{dy}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\vec{\mathbf{j}} = (R - R\cos\theta)\frac{\pi}{2}\vec{\mathbf{i}} - R\sin\theta\frac{\pi}{2}\vec{\mathbf{j}}$$

Para o instante $t = 1s$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ rad, de modo que:

$$\vec{\boldsymbol{v}}_P(t = 1s) = \left(R - R\cos\frac{\pi}{2}\right)\frac{\pi}{2}\vec{\mathbf{i}} - R\sin\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\vec{\mathbf{j}} = \frac{\pi R}{2}\left(\vec{\mathbf{i}} - \vec{\mathbf{j}}\right)$$ **(0,5 ponto)**

b) Aceleração de P em coordenadas cartesianas:

$$\vec{\boldsymbol{a}}_P = \frac{dv_x}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\vec{\mathbf{i}} + \frac{dv_y}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\vec{\mathbf{j}} = R\sin\theta\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\vec{\mathbf{i}} - R\cos\theta\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\vec{\mathbf{j}} = \frac{\pi^2 R}{4}\left(\sin\theta\,\vec{\mathbf{i}} - \cos\theta\,\vec{\mathbf{j}}\right)$$

Para o instante $t = 1s$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ rad, de modo que:

$$\vec{\boldsymbol{a}}_P(t = 1s) = \frac{\pi^2 R}{4}\vec{\mathbf{i}}$$ **(0,5 ponto)**

c) Versor tangente: $\vec{\boldsymbol{\tau}} = \frac{\vec{\boldsymbol{v}}_P}{|\vec{\boldsymbol{v}}_P|}$. No instante $t = 1s$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ rad, de modo que:

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \frac{R\frac{\pi}{2}\left(\vec{\mathbf{i}} - \vec{\mathbf{j}}\right)}{\left|R\frac{\pi}{2}\left(\vec{\mathbf{i}} - \vec{\mathbf{j}}\right)\right|} = \frac{R\frac{\pi}{2}\left(\vec{\mathbf{i}} - \vec{\mathbf{j}}\right)}{R\frac{\pi}{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec{\mathbf{i}} - \vec{\mathbf{j}}\right)$$ **(0,5 ponto)**

d) Velocidade de P em coordenadas intrínsecas:

Para o instante $t = 1s$, $\theta = \frac{\pi}{2} rad$ e $\vec{\boldsymbol{v}}_P(t = 1s) = |\vec{\boldsymbol{v}}_P(t = 1s)|\vec{\boldsymbol{\tau}}(t = 1s) = \frac{\pi R}{2}\sqrt{2}\vec{\boldsymbol{\tau}}(t = 1s)$ **(0,5 ponto)**

e) Aceleração de P em coordenadas intrínsecas:

A componente tangencial da aceleração de P no instante $t = 1s$ é:

$$a_\tau(t = 1s) = \vec{\boldsymbol{a}}_P(t = 1s)\cdot\vec{\boldsymbol{\tau}}(t = 1s) = \frac{\pi^2 R}{4}\vec{\mathbf{i}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec{\mathbf{i}} - \vec{\mathbf{j}}\right) = \frac{\sqrt{2}\pi^2 R}{8}$$

Logo, a aceleração normal de P no instante $t = 1s$ é:

$$\vec{\boldsymbol{a}}_n(t = 1s) = \vec{\boldsymbol{a}}_P(t = 1s) - a_\tau(t = 1s)\vec{\boldsymbol{\tau}}(t = 1s) = \frac{\pi^2 R}{4}\vec{\mathbf{i}} - \frac{\sqrt{2}\pi^2 R}{8}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec{\mathbf{i}} - \vec{\mathbf{j}}\right) = \frac{\pi^2 R}{8}\left(\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}}\right)$$

Assim, a componente normal da aceleração de P no instante $t = 1s$ é:

$$a_n(t = 1s) = |\vec{\boldsymbol{a}}_n(t = 1s)| = \frac{\sqrt{2}\pi^2 R}{8}$$ **(1,0 ponto)**