ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

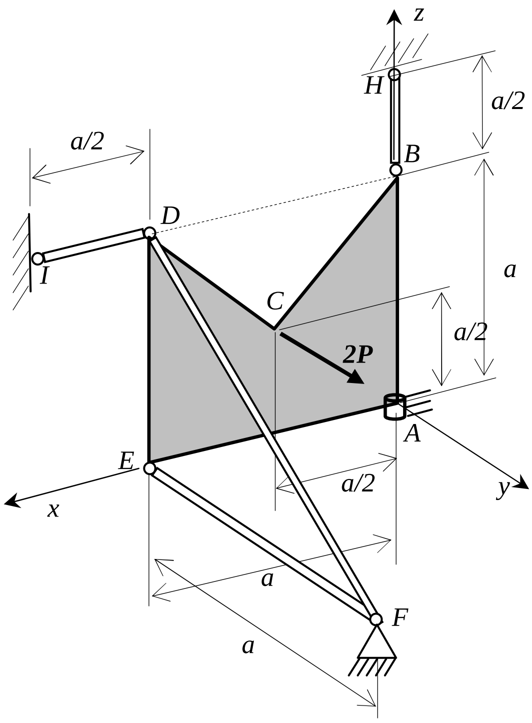
Departamento de Engenharia Mecânica

Primeira Prova de Mecânica A – PME 2100 – 28/08/2012

Tempo de prova: 110 minutos (não é permitido o uso de dispositivos eletrônicos)

1º Questão (3,0 pontos) Considere o sistema de forças ($\vec{F}_i, P_i$) dado por $\vec{F}_1 = F\,\vec{i}$, $\vec{F}_2 = F\,\vec{j} + F\,\vec{k}$ e $\vec{F}_3 = F\,\vec{k}$. As forças estão aplicadas nos pontos: $P_1(a,0,a)$, $P_2(0,a,a)$ e $P_3(0,0,a)$ respectivamente. Pede-se:

a) Calcular a resultante do sistema de forças, o momento em relação ao pólo *O* (0, 0, 0);
b) Verificar se o sistema é redutível a uma única força. Justificar;
c) Calcular o momento em relação ao pólo *D* (0, a, a);
d) Determinar o lugar geométrico dos pontos *E* onde o momento do sistema de forças é mínimo;

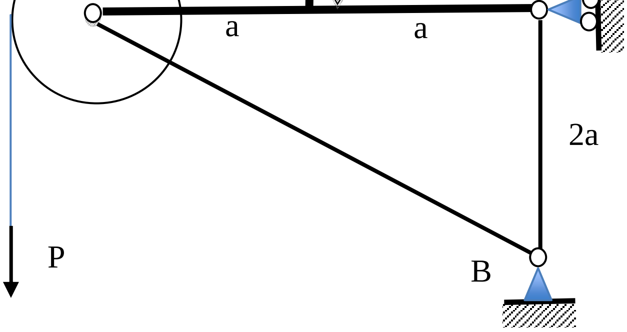


2º Questão (3,5 pontos) A placa plana e homogênea *ABCDEA*, de peso ***P***, está vinculada no anel *A* (eixo vertical) e nas extremidades *B*, *D* e *E* das barras *BH*, *DI*, *DF* e *EF*. Ao ponto *C* da placa aplica-se uma força $2P\vec{j}$ conforme indicado na figura. O ponto *F* tem coordenadas (*a*,*a*,0) e as barras *BH*, *DI*, *DF EF* têm peso desprezível. Nessas condições, pede-se:

(a) Calcular a posição do baricentro da placa *ABCDEA*;
(b) Desenhar o diagrama de corpo livre da placa *ABCDEA*;
(c) Determinar as reações no anel e as forças nas barras *BH*, *DI*, *EF* e *DF*.

3º Questão (3,5 pontos) Na figura a peça ACD e as barras AB e BC não têm peso. Em A atua um apoio simples bilateral e em B uma articulação. O fio da polia é ideal e a polia não tem peso. Pede-se:

a) O diagrama de corpo livre do conjunto (barras, peça, polia e fio);
b) As reações externas em A e B;
c) O diagrama de corpo livre da polia, da peça ADC e das barras BC e AB;
d) A força atuante na barra BC e indicar se é de tração ou compressão



Av. Prof. Mello Moraes, 2231 – 05508-900 – São Paulo – SP – BRASIL
TEL.: 55 11 3091-5355/5561/5570 – FAX: 55 11 3813 1886

Resolução da 1º questão (3,0 pontos)

Considere o sistema de forças ($\vec{F}_i, P_i$) dados por $\vec{F}_1 = F\,\vec{i}$, $\vec{F}_2 = F\,\vec{j} + F\,\vec{k}$ e $\vec{F}_3 = F\,\vec{k}$. As forças estão aplicadas nos pontos: $P_1(a,0,a)$, $P_2(0,a,a)$ e $P_3(0,0,a)$ respectivamente. Pede-se:

a) Calcular a resultante do sistema de forças, o momento em relação ao pólo *O* (0, 0, 0);

$\vec{R} = \sum \vec{F}_i = F\,\vec{i} + F\,\vec{j} + 2F\,\vec{k}$; ; (0,5)

$\vec{M}_O = \sum (P_i - O) \wedge \vec{F}_i = (a\,\vec{i} + a\,\vec{k}) \wedge F\,\vec{i} = Fa\,\vec{j}$; (0,5)

b) Verificar se o sistema é redutível a uma única força. Justificar;

$I = \vec{M}_O \cdot \vec{R} = (Fa\,\vec{j}) \cdot (F\,\vec{i} + F\,\vec{j} + 2F\,\vec{k}) = F^2 a$;

como I≠0 o sistema não pode ser redutível a uma única força; (0,5)

c) Calcular o momento em relação ao pólo *D* (0, a, a); Utilizando a formula de mudança de pólo:

$\vec{M}_D = \vec{M}_O + (O - D) \wedge \vec{R} = Fa\,\vec{j} + (-a\,\vec{j} - a\,\vec{k}) \wedge F(\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}) = Fa(-\vec{i} + \vec{k})$ (0,5)

d) Determinar o lugar geométrico dos pontos *E* onde o momento do sistema de forças é mínimo; Utilizando a formula do eixo central onde o momento é mínimo:

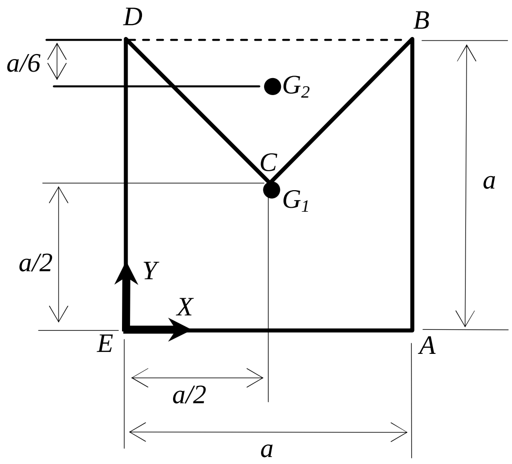
$$(E - O) = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_O}{|\vec{R}|^2} + \lambda \vec{R} = \frac{(F\,\vec{i} + F\,\vec{j} + 2F\,\vec{k}) \wedge (Fa\,\vec{j})}{6F^2} + \lambda \vec{R} = \frac{a(\vec{k} - 2\vec{i})}{6} + \lambda F(\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}) \qquad (1,0)$$

para ∀ λ ∈ ℜ.

Av. Prof. Mello Moraes, 2231 – 05508-900 – São Paulo – SP – BRASIL
TEL.: 55 11 3091-5355/5561/5570 – FAX: 55 11 3813 1886

Resolução da 2º questão (3,5 pontos)

Adotando-se o sistema de eixos ***EXY*** indicado na figura e considerando-se os baricentros G_1 do quadrado *ABDE* e G_2 do triângulo *BCD*, a ordenada *Y* do baricentro *G* da placa homogênea *ABCDEA* é dada por:



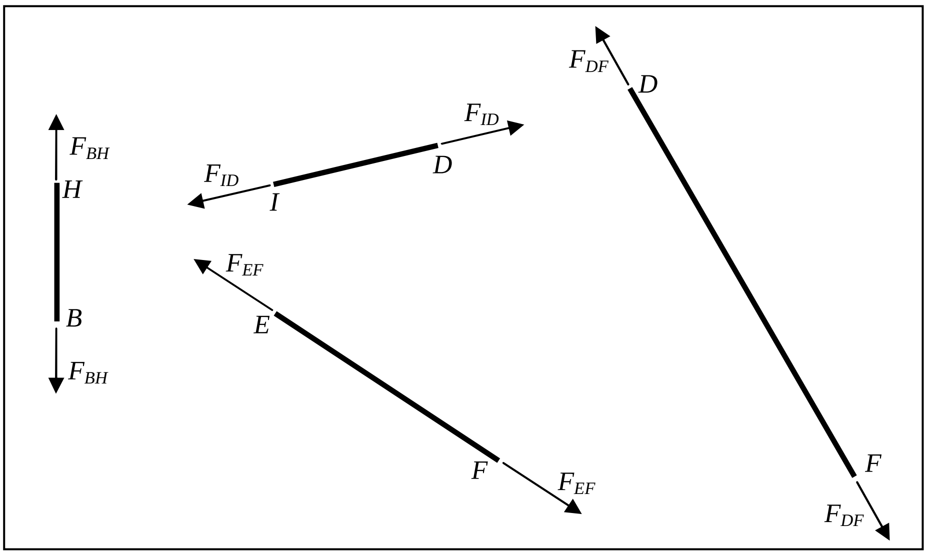
$$Y_G = \frac{a^2 \frac{a}{2} - \frac{a^2}{4}\left(a - \frac{1}{3}\frac{a}{2}\right)}{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{7}{18}a$$

Relativamente ao sistema de eixos *Axyz* do enunciado do problema, a peça *ABCDEA* está contida no plano *xz* e apresenta um eixo *Cz* de simetria vertical. Logo, a posição do baricentro *G* da placa no sistema *Axyz* é dada por:

$$G = \left(\frac{a}{2}, 0, \frac{7a}{18}\right)$$

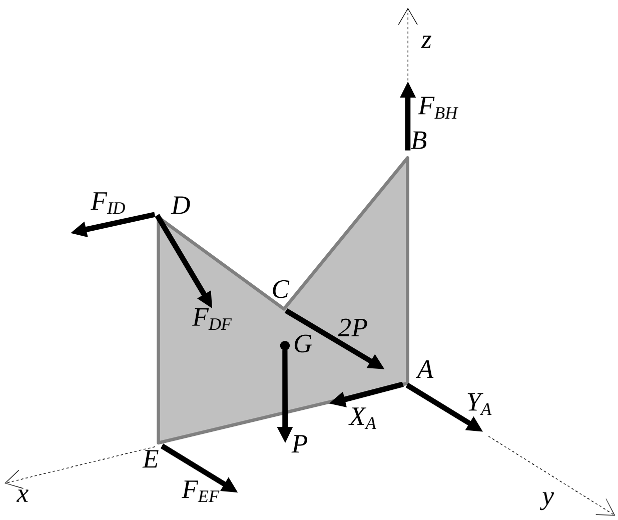
Resposta (a) (1,0)

As barras *BH*, *ID*, *EF* e *DF*, de peso desprezível, estão em equilíbrio sob a ação de duas forças aplicadas em suas extremidades. Logo, essas forças são iguais, opostas e têm mesma linha de ação. Os diagramas de corpo livre das barras *BH*, *ID*, *EF* e *DF* são apresentados na figura abaixo:



Utilizando-se os diagramas de corpo livre das barras e aplicando-se o Princípio de Ação e Reação, constrói-se o diagrama de corpo livre da placa *ABCDEA* indicado na proxima figura.

Av. Prof. Mello Moraes, 2231 – 05508-900 – São Paulo – SP – BRASIL
TEL.: 55 11 3091-5355/5561/5570 – FAX: 55 11 3813 1886



Resposta (b) (1,0)

Para que a placa *ABCDEA* esteja em equilíbrio, é necessário que:

- $\vec R = F_{ID}\vec i + F_{EF}\vec j + F_{BH}\vec k + 2P\vec j + X_A\vec i + Y_A\vec j - P\vec k + F_{DF}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec j - F_{DF}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec k = \vec 0$ (1)
- $\vec M_A = (E-A)\wedge F_{EF}\vec j + (G-A)\wedge\left(-P\vec k\right) + (C-A)\wedge 2P\vec j + (D-A)\wedge\left(F_{ID}\vec i + F_{DF}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec j - F_{DF}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec k\right) = \vec 0$

$$\Rightarrow a\vec i \wedge F_{EF}\vec j + \left(\frac{a}{2}\vec i + \frac{7a}{18}k\right)\wedge\left(-P\vec k\right) + \left(\frac{a}{2}\vec i + \frac{a}{2}\vec k\right)\wedge 2P\vec j + \left(a\vec i + a\vec k\right)\wedge\left(F_{ID}\vec i + F_{DF}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec j - F_{DF}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec k\right) = \vec 0$$

$$\Rightarrow aF_{EF}\vec k + \frac{a}{2}P\vec j + aF_{DF}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec k + aP\vec k - aP\vec i + aF_{DF}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec j + aF_{ID}\vec j - aF_{DF}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec i = \vec 0 \qquad (2)$$

Das equações vetoriais (1) e (2) resultam as 6 equações escalares abaixo:

$$F_{ID} + X_A = 0 \qquad (3)$$

$$F_{EF} + 2P + Y_A + F_{DF}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \qquad (4)$$

$$F_{BH} - P - F_{DF}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \qquad (5)$$

$$-aP - aF_{DF}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \qquad (6)$$

$$\frac{a}{2}P + aF_{DF}\frac{\sqrt{2}}{2} + aF_{ID} = 0 \qquad (7)$$

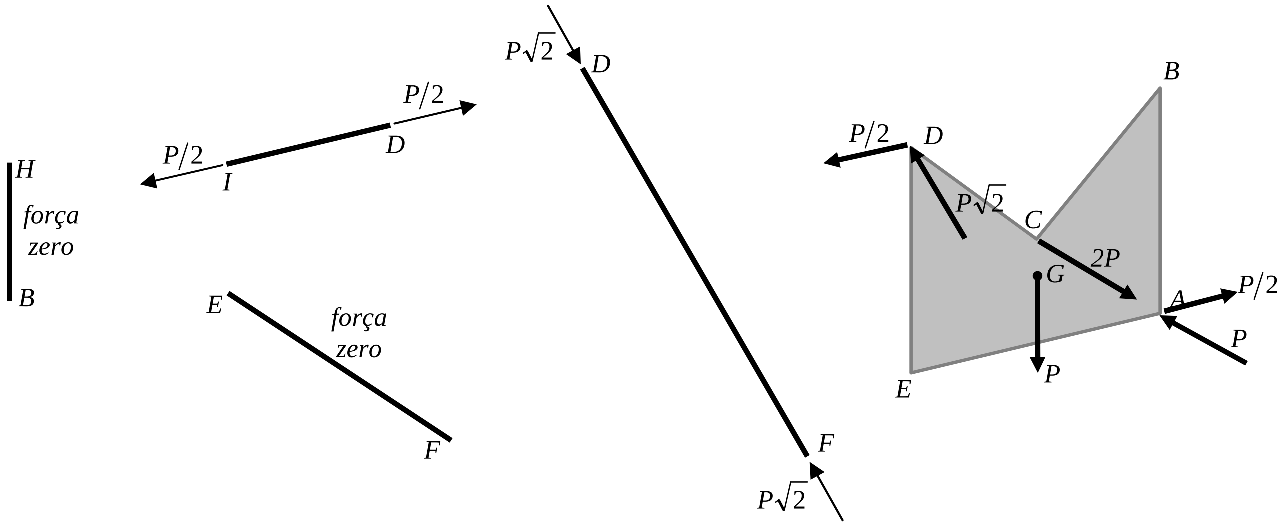
$$aF_{EF} + aF_{DF}\frac{\sqrt{2}}{2} + aPk = 0 \qquad (8)$$

(0,5)

Resolvendo-se o sistema de equações (3) a (8), obtêm-se:

- anel A: $\vec{R}_A = -\dfrac{P}{2}\vec{i} - P\vec{j}$
- barra BH: $F_{BH} = 0$
- barra DI: $F_{ID} = \dfrac{P}{2}$ $(\textit{tração})$
- barra EF: $F_{EF} = 0$
- barra DF: $F_{DF} = -P\sqrt{2}$ $(\textit{compressão})$

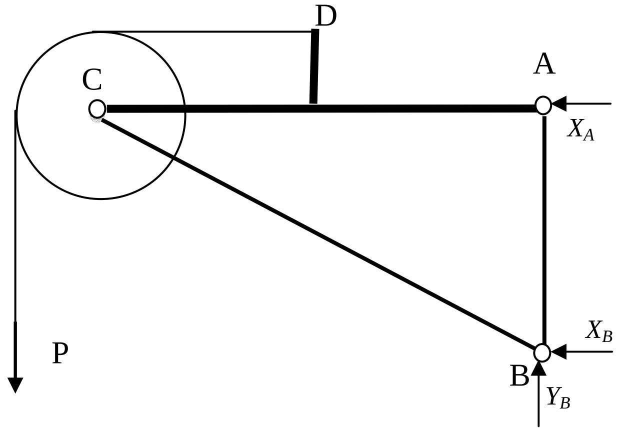
Os diagramas de corpo livre das barras e da placa, após a resolução do sistema de equações, são apresentados nas figuras abaixo:



Resposta (c) (1,0)

Resolução da 3ª questão. (3,5 pontos)

O diagrama de corpo livre do conjunto (barras+peça ACD+polia+fio) é apresentado na figura abaixo.



Resposta (a) (0,5)

Aplicando-se as equações de equilíbrio do conjunto ilustrado na figura acima, obtém-se:

$$-X_A - X_B = 0 \qquad (1)$$

$$Y_B - P = 0 \qquad (2)$$

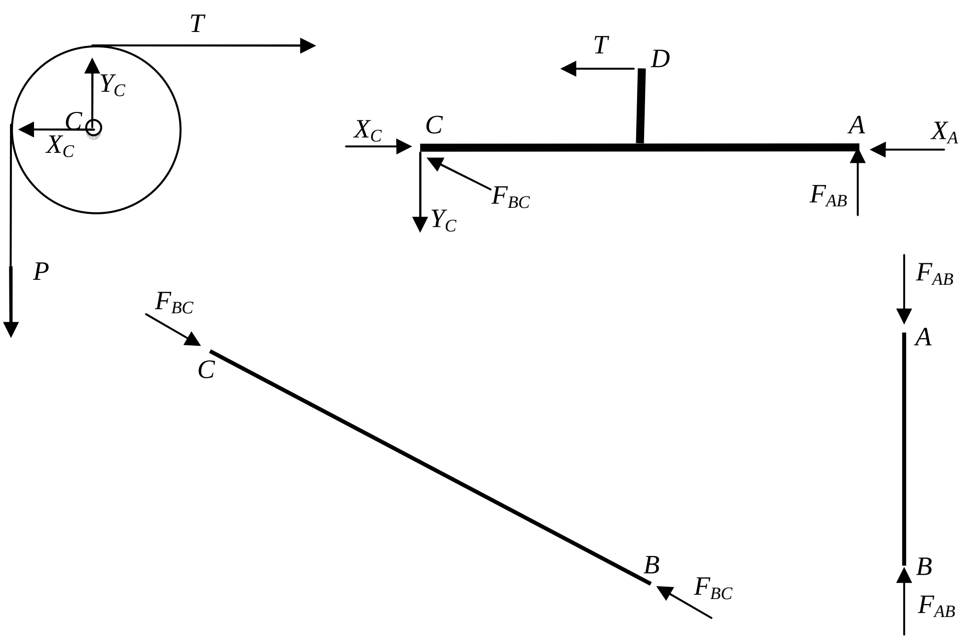
$$P\left(2a + \frac{a}{2}\right) + X_A \cdot 2a = 0 \qquad (3)$$

Resolvendo-se o sistema de equações 1 a 3, obtêm-se:

$$X_A = -\frac{5P}{4} \qquad X_B = \frac{5P}{4} \qquad Y_B = P$$

Resposta (b) (1,0)

Os diagramas de corpo livre da polia, das barras *AB* e *BC* e da peça *ADC* são apresentados na figura abaixo:



Resposta (c) (1,0)

Aplicando-se as equações de equilíbrio à polia, obtêm-se:

$$P\frac{a}{2} - T\frac{a}{2} = 0 \Rightarrow T = P$$

$$-X_C + T = 0 \Rightarrow X_C = P$$

$$Y_C - P = 0 \Rightarrow Y_C = P$$

Aplicando-se a equação de equilíbrio à peça *ADC*, segundo o eixo horizontal, obtém-se:

$$P - P - F_{BC}\frac{\sqrt{2}}{2} - X_A = 0 \Rightarrow -F_{BC}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{5P}{4} = 0 \Rightarrow F_{BC} = \frac{5\sqrt{2}}{4}P \text{ (compressão)}$$

Resposta (d) (1,0)