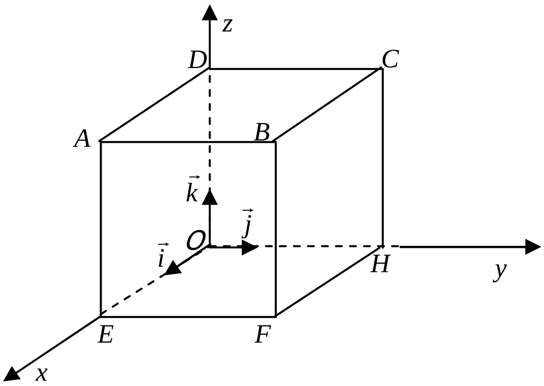
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. CEP 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2100 – MECÂNICA A – P1 – 25 de setembro de 2009

QUESTÃO 1 (3 pontos): A figura mostra um cubo homogêneo de peso $\vec{P} = -2p\vec{k}$ e aresta "a". Sobre o cubo agem as forças $\vec{F}_1 = 3p\vec{k}$ aplicada no ponto *H* e $\vec{F}_2 = -p\vec{i} - 2p\vec{j}$ aplicada no ponto *O*, e um binário de momento $\vec{M} = -3ap\vec{i} + 4ap\vec{j} + ap\vec{k}$. Pede-se:



(a) **(0,5)** Determinar a resultante $\vec{R}$;
(b) **(1,0)** Determinar o momento $\vec{M}_O$ em relação ao ponto *O*;
(c) **(0,5)** Verificar se é possível reduzir o sistema a uma única força, justificando;
(d) **(1,0)** Determinar o módulo do momento mínimo do sistema de forças dado.

SOLUÇÃO

A resultante do sistema de forças dado é:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{P} = -p\vec{i} - 2p\vec{j} + p\vec{k}$$

(Resposta **a**)

Notando que $G = (a/2, a/2, a/2)$ é o baricentro do cubo, o momento em relação ao pólo *O* do sistema de forças dado, é:

$$\vec{M}_O = (G - O) \wedge \vec{P} + (H - O) \wedge \vec{F}_1 + (O - O) \wedge \vec{F}_2 + \vec{M}$$

ou seja:

$$\vec{M}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a/2 & a/2 & a/2 \\ 0 & 0 & -2p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 3p \end{vmatrix} + \left(-3ap\vec{i} + 4ap\vec{j} + ap\vec{k}\right)$$

$$\therefore \vec{M}_O = -ap\vec{i} + 5ap\vec{j} + ap\vec{k}$$

(Resposta **b**)

Um sistema de forças é redutível a uma única força se e somente se a resultante é não-nula e o invariante escalar $I = \vec{M}_O . \vec{R} = 0$.

Para o sistema de forças dado, tem-se:

$$I = \vec{M}_O . \vec{R} = \left(-ap\vec{i} + 5ap\vec{j} + ap\vec{k}\right)\left(-p\vec{i} - 2p\vec{j} + p\vec{k}\right) = ap^2 - 10ap^2 + ap^2 = -8ap^2 \neq 0$$

Como o invariante escalar do sistema de forças dado é diferente de zero, esse sistema não é redutível a uma única força.

(Resposta **c**).

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. CEP 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

O módulo do momento mínimo de um sistema de forças é dado por:

$$\left|\vec{M}_E\right| = \vec{M}_O \frac{\vec{R}}{\left|\vec{R}\right|}$$

Como $\left|\vec{R}\right|^2 = \left(-p\vec{i} - 2p\vec{j} + p\vec{k}\right)\left(-p\vec{i} - 2p\vec{j} + p\vec{k}\right) = 6p^2$

resulta que:

$$\left|\vec{M}_E\right| = \frac{\left(-ap\vec{i} + 5ap\vec{j} + ap\vec{k}\right)\cdot\left(-p\vec{i} - 2p\vec{j} + p\vec{k}\right)}{\sqrt{6}.p} = \frac{4}{3}\sqrt{6}.ap$$

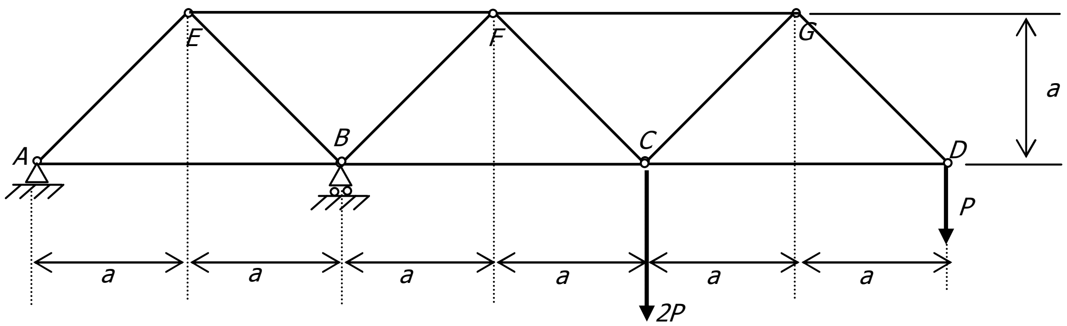
(Resposta **d**)

QUESTÃO 2 (3,5 pontos): A estrutura mostrada na figura é composta por 11 barras bi-articuladas, de massa desprezível. Sabendo que o vínculo em *A* é uma articulação e em *B* um apoio simples, pede-se:

(a) **(1,5)** as reações externas;

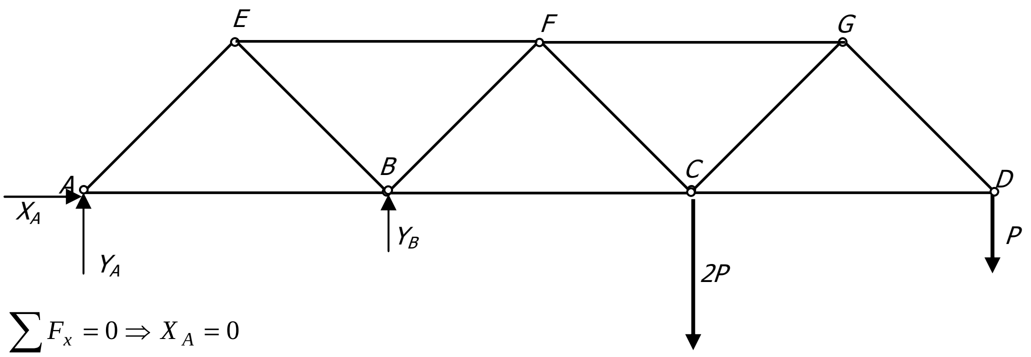
(b) **(1,0)** a força na barra *AE*, indicando se é de tração ou de compressão;

(c) **(1,0)** a força na barra *CD*, indicando se é de tração ou de compressão.



SOLUÇÃO

Construímos o diagrama de equilíbrio da estrutura e determinamos as reações vinculares mediante a aplicação das equações de equilíbrio, ou seja:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow X_A = 0$$

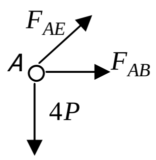
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow Y_B.2a - 2P.4a - P.6a = 0 \Rightarrow Y_B = 7P$$

(Resposta **a**)

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow Y_A = -4P$$

Para determinarmos as forças atuantes nas barras *AE* aplicaremos o Método dos Nós ao nó A.

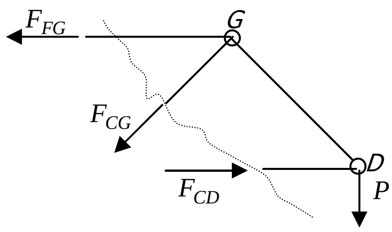
- Diagrama de corpo livre do nó A:



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{AE}.\frac{\sqrt{2}}{2} = 4P \Rightarrow F_{AE} = 4\sqrt{2}.P$$ **(**Tração**)**

(Resposta **b**)

Para determinarmos as forças atuantes na barra *CD* aplicaremos o Método das seções ao longo de uma secção que corta as barras *FG*, *CG* e *CD*.



$$\sum M_G = 0 \Rightarrow -P.a + F_{CD}.a = 0 \Rightarrow F_{CD} = P$$ (Compressão)

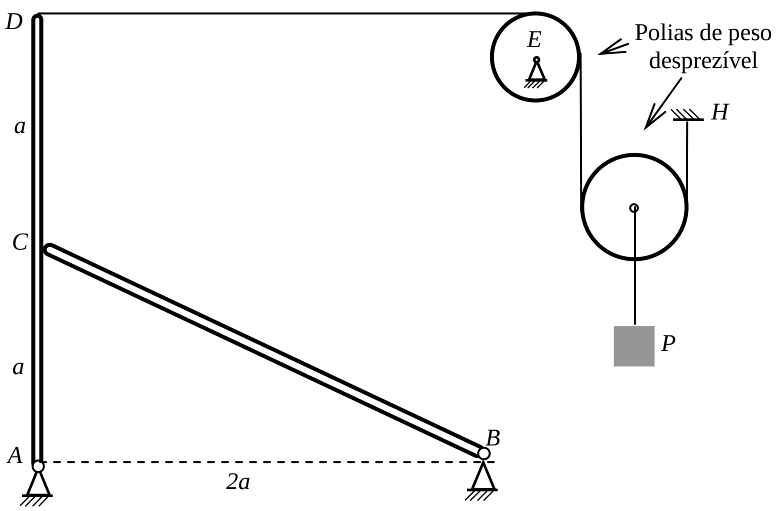
(Resposta **c**)

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. CEP 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

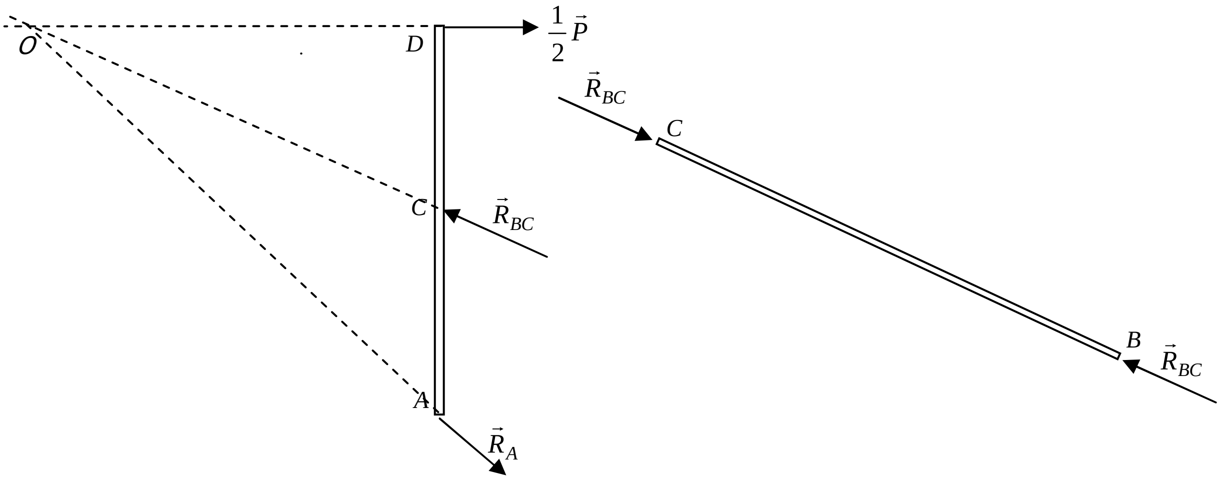
QUESTÃO 3 (3,5 pontos): A estrutura da figura á composta por duas barras de peso desprezível. A barra *AD*, contínua e de comprimento *2a*, é articulada em *A* e apoiada em *C* sobre a extremidade da barra *BC*. No ponto de contacto entre as duas barras o coeficiente de atrito é μ. Ao ponto *D* da barra *AD* prende-se um cabo passante por um sistema de duas polias — uma articulada em *E* e outra móvel, conforme indicado na figura. Pelo centro da polia móvel suporta-se uma massa de peso *P*. Pede-se:



(a) **(1,0)** O diagrama de corpo livre das barras *AD* e *BC*;
(b) **(1,5)** As reações em *A* e em *B*;
(c) **(1,0)** O valor mínimo de μ para que a estrutura se mantenha em equilíbrio sob a ação da força *P*.

SOLUÇÃO

Item (a): Diagramas de corpo livre das barras.



Como a barra *BC* está em equilíbrio sujeita a apenas duas forças em suas extremidades, elas devem ser iguais e diretamente opostas.
A barra *AD*, por seu turno, está em equilíbrio sob a ação de apenas 3 forças (necessariamente coplanares); logo, elas deverão ser ou concorrentes ou paralelas. Como

duas dessas forças têm direções conhecidas — a força horizontal $\frac{1}{2}P$ aplicada pelo sistema de polias e a força de contacto $\vec{R}_{BC}$ aplicada pela barra BC ao longo de sua direção — as três forças mencionadas são concorrentes (vide diagrama de corpo livre da barra AD).

Item (b): Reações em A e em B.

As equações de equilíbrio da barra AD, são:

$$R_{Ax} - R_{BC}\frac{2a}{\sqrt{a^2+4a^2}} + \frac{1}{2}P = 0 \Rightarrow R_{Ax} = \frac{2}{\sqrt{5}}R_{BC} - \frac{P}{2}$$

$$-R_{Ay} + R_{BC}\frac{a}{\sqrt{a^2+4a^2}} = 0 \Rightarrow R_{Ay} = \frac{1}{\sqrt{5}}R_{BC}$$

$$\sum M_{Az} = -\frac{1}{2}P.2a + R_{BC}\frac{2a}{\sqrt{a^2+4a^2}}.a = 0 \Rightarrow R_{BC} = \frac{\sqrt{5}}{2}P$$

Resolvendo-se o sistema de equações anteriores, obtêm-se:

$$R_{BC} = \frac{\sqrt{5}}{2}P \Rightarrow \vec{R}_{BC} = \frac{\sqrt{5}}{2}P\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{\sqrt{5}}{2}P\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j} = P\vec{i} + \frac{P}{2}\vec{j}$$

$$R_{Ax} = \frac{P}{2} \quad \text{e} \quad R_{Ay} = \frac{P}{2}$$

Item (c): Valor mínimo de μ para satisfazer às condições de equilíbrio.

A reação vertical R_{BC_y} é devida à força de atrito no contacto entre as barras BC e AD, ou seja,

$$F_{at} = R_{BCy} = \frac{\sqrt{5}}{2}P\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} \le \mu N = \mu R_{BCx} = \mu\frac{\sqrt{5}}{2}P\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \mu.P \Rightarrow \frac{P}{2} \le \mu.P$$

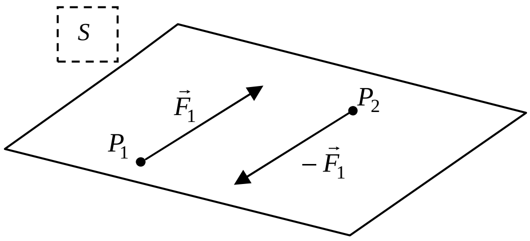
Portanto, deve-se ter $\mu \ge 0{,}5$ para que a estrutura se mantenha em equilíbrio.

QUESTÃO 4 / optativa (1 ponto): Dado um sistema $S = \{(\vec{F}_1, P_1), (\vec{F}_2, P_2), \ldots, (\vec{F}_n, P_n)\}$ não equilibrado de forças $\vec{F}_i$ aplicadas aos pontos P_i, prove que sempre é possível incluir nesse sistema uma $\vec{F}$ não nula aplicada em um ponto P de forma a reduzir o sistema de forças
$S' = S \cup \{\vec{F}, P\} = \{(\vec{F}, P), (\vec{F}_1, P_1), (\vec{F}_2, P_2), \ldots, (\vec{F}_n, P_n)\}$
a uma única força.

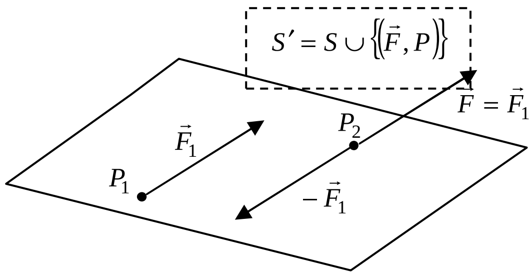
SOLUÇÃO

Suporemos, inicialmente, que o sistema S seja equivalente a um binário (figura A), ou seja, $S = \{(\vec{F}_1, P_1), (-\vec{F}_1, P_2)\}$

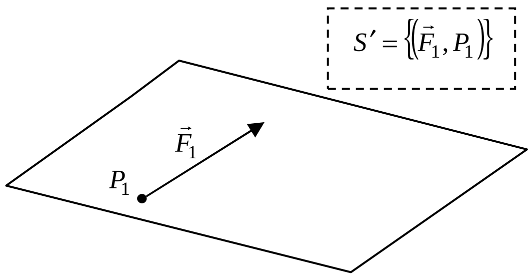
Nesse caso, se acrescentarmos ao sistema original S uma força $\vec{F} = \vec{F}_1$ aplicada ao ponto P_2 (figura B), resultará o sistema $S' = S \cup \{(\vec{F}_1, P_2)\} = \{(\vec{F}_1, P_1), (-\vec{F}_1, P_2), (\vec{F}_1, P_2)\}$.
Notando que o sistema de forças $\{(-\vec{F}_1, P_2), (\vec{F}_1, P_2)\}$ é equivalente ao sistema nulo, concluímos que o novo sistema de forças S' é equivalente a uma única força, ou seja, $S' = \{(\vec{F}_1, P_1)\}$ (figura C).



(A)



(B)

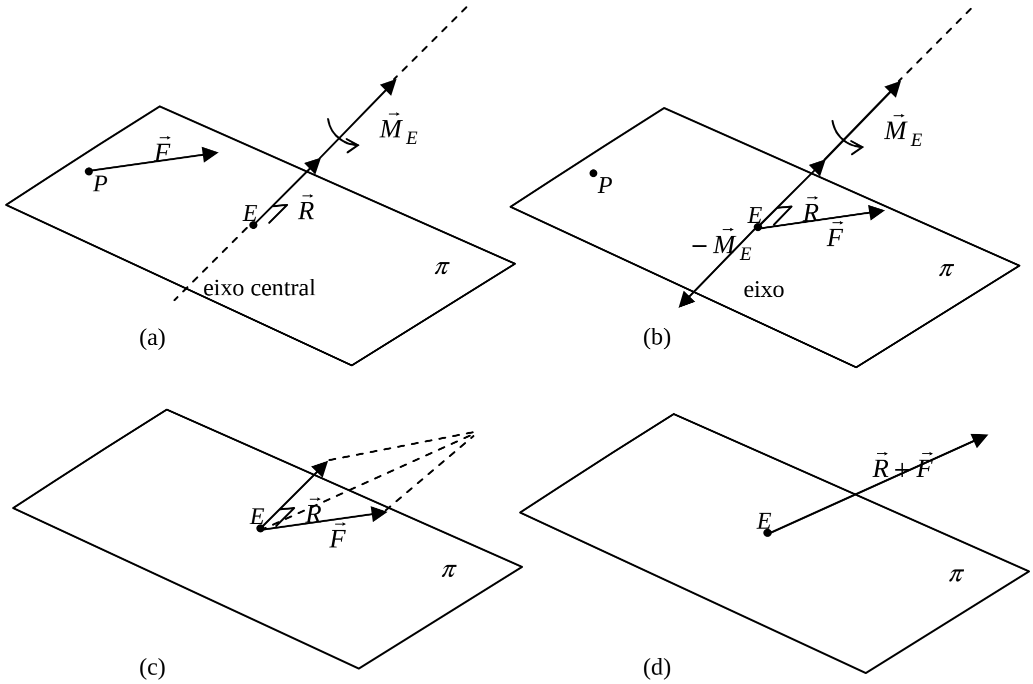


(C)

Admitiremos, em seguida, que o sistema original S seja redutível a uma força $\vec{R}$ e um binário $\vec{M}_O$. Nesse caso, podemos representar S por um torçor aplicado a um ponto E do eixo central de forças, ou seja, S é equivalente a $\{(\vec{R}, E), (\vec{M}_E)\}$, onde $\vec{M}_E = h\vec{R}$ é o momento mínimo, paralelo à direção de $\vec{R}$. Acrescentemos a S uma nova força $\vec{F}$, aplicada a um ponto P arbitrário, mas com linha de ação pertencente a um plano normal ao eixo central do sistema original de forças (vide figura *a*). Reduzindo-se o novo sistema $S' = S \cup \{(\vec{F}, P)\}$ a um ponto E qualquer do eixo central (vide figura *b*), constatamos que o momento adicional causado por $\vec{F}$ em E tem a mesma direção de $\vec{M}_E$. Portanto, se $\vec{F}$ for aplicada em um ponto P de forma a que $(P - E) \wedge \vec{F} = -\vec{M}_E$, ou seja, se o ponto P de aplicação da força $\vec{F}$ for dado por

$$P = E + \frac{\vec{F} \wedge (-\vec{M}_E)}{|\vec{F}|^2} + \lambda \frac{\vec{F}}{|\vec{F}|}$$

o sistema $S' = S \cup \{(\vec{F}, P)\}$ será equivalente a uma única força (vide figuras *c* e *d*).



Admitindo-se, finalmente, que o sistema original S seja, *de per si*, equivalente a uma única força $\vec{R}$, o procedimento anterior pode ser aplicado, bastando observar que a força $\vec{F}$ adicional deve ser aplicada em algum ponto P de forma a que as linhas de ação de $\vec{R}$ e $\vec{F}$ sejam concorrentes.