ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

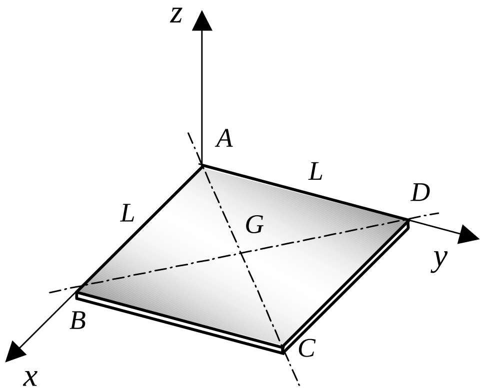
Departamento de Engenharia Mecânica

PME2100 – Mecânica A

Primeira Prova – 16 de setembro de 2003 – Duração: 120 minutos

GABARITO

(3,5 pontos) 1 – Uma placa quadrada, de aresta L e de espessura desprezível, está submetida ao sistema de forças composto por um binário de momento $\vec{M}$ e as forças $(\vec{F}_1, D)$, $(\vec{F}_2, B)$ e $(\vec{P}, G)$.



$$\vec{M} = +P\frac{L}{2}\,\vec{j} \qquad \vec{F}_1 = -\frac{P}{2}\vec{j} + \frac{P}{2}\vec{k}$$

$$\vec{F}_2 = +\frac{P}{2}\vec{k} \qquad \vec{P} = -P\,\vec{k}$$

a) Calcule a resultante $\vec{R}$ do sistema de forças e o momento $\vec{M}_A$ do sistema de forças em relação ao pólo A.

b) Calcule o momento $\vec{M}_B$ do sistema de forças em relação ao pólo B.

c) Verifique se o sistema pode ser reduzido a uma única força.

d) Calcule o vetor momento mínimo $\vec{M}_E$

e) Determine o eixo em relação ao qual o momento do sistema de forças é mínimo.

Solução:

a) $$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{P} = -\frac{P}{2}\vec{j} + \frac{P}{2}\vec{k} + \frac{P}{2}\vec{k} - P\,\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \vec{R} = -\frac{P}{2}\vec{j}$$

$$\vec{M}_A = (D-A)\times\vec{F}_1 + (B-A)\times\vec{F}_2 + (G-A)\times\vec{P} + \vec{M}$$

$$\vec{M}_A = L\,\vec{j}\times\left(-\frac{P}{2}\vec{j} + \frac{P}{2}\vec{k}\right) + L\,\vec{i}\times\frac{P}{2}\vec{k} + \left(\frac{L}{2}\vec{i} + \frac{L}{2}\vec{j}\right)\times\left(-P\,\vec{k}\right) + \left(P\frac{L}{2}\vec{j}\right)$$

$$\vec{M}_A = L\frac{P}{2}\vec{i} - L\frac{P}{2}\vec{j} + \frac{L}{2}P\,\vec{j} - \frac{L}{2}P\,\vec{i} + P\frac{L}{2}\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \vec{M}_A = P\frac{L}{2}\vec{j}$$

b) Fórmula de mudança de pólo:

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + (A-B)\times\vec{R} = \left(P\frac{L}{2}\vec{j}\right) + \left(-L\,\vec{i}\right)\times\left(-\frac{P}{2}\vec{j}\right) \quad \Rightarrow \quad \vec{M}_B = +P\frac{L}{2}\vec{j} + L\frac{P}{2}\vec{k}$$

c) Invariante escalar: $I = \vec{M}_A\cdot\vec{R} = \left(P\frac{L}{2}\vec{j}\right)\cdot\left(-\frac{P}{2}\vec{j}\right) \quad \Rightarrow \quad I = -P^2\frac{L}{4}$

Portanto o sistema não pode ser reduzido a uma única força.

d) O momento mínimo $\vec{M}_E$ é paralelo à resultante e seu módulo pode ser calculado dividindo-se o invariante escalar pelo módulo da resultante:

$$\vec{M}_E = \frac{I}{|\vec{R}|}\cdot\frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} = \frac{-P^2\frac{L}{4}}{\frac{P}{2}}\cdot\frac{-\frac{P}{2}\vec{j}}{\frac{P}{2}} \quad \Rightarrow \quad \vec{M}_E = P\frac{L}{2}\vec{j}$$

e) Usando a fórmula de mudança de pólo:

$$\vec{M}_E = \vec{M}_A + (A-E)\times\vec{R}$$

$$P\frac{L}{2}\vec{j} = \left(P\frac{L}{2}\vec{j}\right) + \left(-x_E\,\vec{i} - y_E\,\vec{j} - z_E\,\vec{k}\right)\times\left(-\frac{P}{2}\vec{j}\right)$$

portanto:

$$\left(-x_E\,\vec{i} - y_E\,\vec{j} - z_E\,\vec{k}\right)\times\left(-\frac{P}{2}\vec{j}\right) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad x_E\frac{P}{2}\vec{k} - z_E\frac{P}{2}\vec{i} = \vec{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_E = 0 \\ y_E \text{ qualquer} \\ z_E = 0 \end{array}\right\} \text{ ou seja, o próprio eixo } Ay.$$

Solução alternativa dos itens (d) e (e):

d) $\vec{M}_E = \vec{M}_A + (A-E)\times\vec{R} = h\cdot\vec{R}$

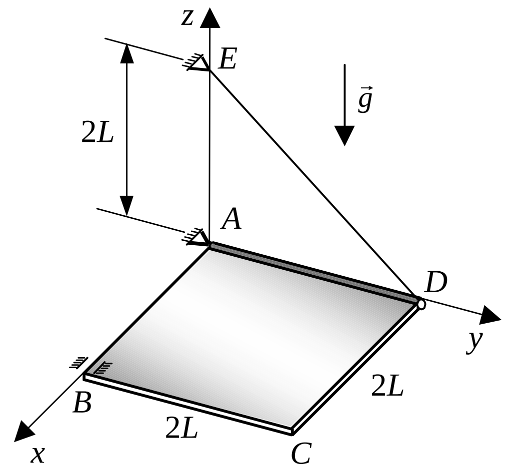
$$h = \frac{\vec{M}_A\cdot\vec{R}}{|\vec{R}|^2} = \frac{-P^2\frac{L}{4}}{\frac{P^2}{4}} = -L \quad \Rightarrow \quad \vec{M}_E = P\frac{L}{2}\vec{j}$$

e) Eixo central:

$$(E-A) = \frac{\vec{R}\times\vec{M}_A}{|\vec{R}|^2} + \alpha\cdot\vec{R} = \alpha\cdot\vec{R} \;\Rightarrow\; E = -\alpha\cdot\frac{P}{2}\vec{j}$$

Portanto o próprio eixo Ay.

(3,0 pontos) 2 – Um sólido é formado por uma placa *ABCD*, homogênea, quadrada, de aresta 2*L* e massa 2*m*, e por uma barra *AD*, soldada na placa, e de massa *m*. A espessura da placa é desprezível, bem como o diâmetro da barra. O sólido é suportado por uma articulação em *A*, por um anel em *B*, e por um fio *ED*, de massa desprezível e inextensível, que está no plano *Ayz*.



a) Determine o baricentro *G* do sólido.

b) Desenhe o diagrama de corpo livre do sólido.

c) Considerando o sistema em equilíbrio, calcule a tração *T* no fio *ED*.

d) Determine as reações externas em *A* e *B*.

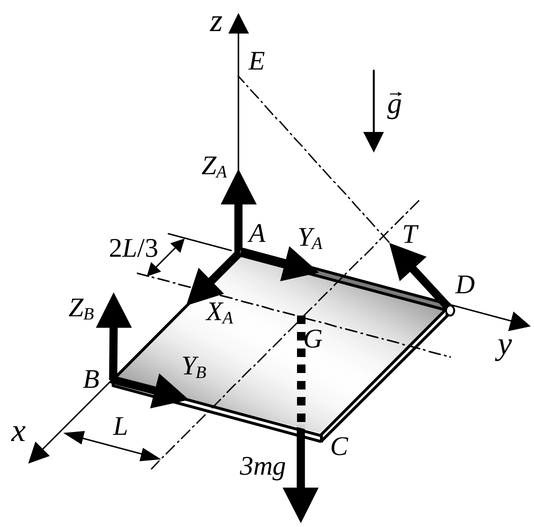
Solução:

a) Como o sólido está no plano *Axy*, temos que $z_G = 0$.

Por simetria, $y_G = L$

$$x_G = \frac{m\cdot 0 + 2m\cdot L}{m+2m} \quad \Rightarrow \quad x_G = \frac{2}{3}L$$

b) Diagrama de corpo livre:



c) No equilíbrio:

$$\vec{R} = \vec{0}$$

$$\vec{M}_A = \vec{0}$$

Em particular, a componente M_{Ax} (direção $\vec{i}$) do momento $\vec{M}_A$ é nula. Esta componente M_{Ax} é o momento do sistema de forças em relação ao eixo *Ax*. Como as linhas de ação das reações nos vínculos em *A* e *B* são concorrentes ou coincidem com o eixo *Ax*, o momento destas forças em relação ao eixo *Ax* é nulo, portanto podemos considerar apenas a força peso e a tração no fio:

$$M_{Ax} = -3mg\cdot L + T\cdot L\sqrt{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{3mg\sqrt{2}}{2}$$

d)

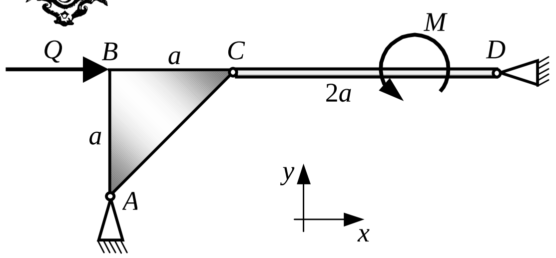
$$\sum M_{Ay} = 0 \quad \Rightarrow \quad -Z_B\cdot 2L + 3mg\cdot\frac{2L}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_B = mg$$

$$\sum M_{Az} = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_B\cdot 2L = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_B = 0$$

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad X_A = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_A + Y_B - T\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_A = T\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad Y_A = \frac{3mg}{2}$$

$$\sum F_z = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_A + Z_B + T\frac{\sqrt{2}}{2} - 3mg = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_A + mg + \frac{3mg}{2} - 3mg = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_A = \frac{mg}{2}$$



Os pesos da placa triangular e da barra são desprezíveis.

(3,5 pontos) 3 – A placa triangular *ABC* e a barra *CD* estão unidas pela articulação *C*. *A* e *D* são articulações. Uma força de módulo *Q* é aplicada em *B* e um binário, cujo momento é *M*, é aplicado na barra *CD*, conforme indicado. Pede-se:

a) O diagrama de corpo livre da estrutura como um todo e os diagramas de corpo livre de seus componentes barra e placa triangular.

b) As reações em *A* e *D*.

c) Refazer o diagrama de corpo livre da estrutura como um todo, com os esforços calculados anteriormente.

Solução:

a) Diagrama de corpo livre da estrutura como um todo:

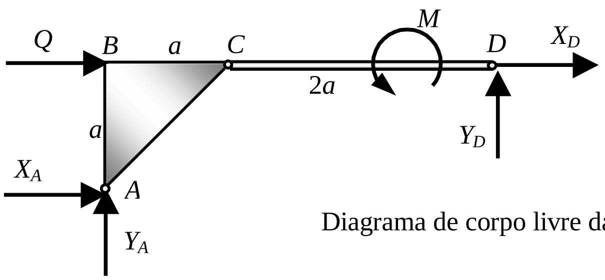


Diagrama de corpo livre da placa *ABC*:

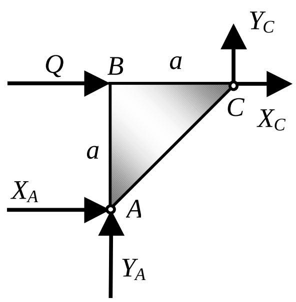
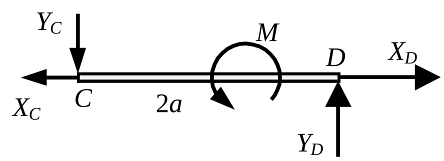


Diagrama de corpo livre da barra *CD*:



b) Equilíbrio da barra *CD*:

$$\sum M_C = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_D \cdot 2a + M = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_D = -\frac{M}{2a}$$

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad X_C = X_D$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_C = Y_D$$

Equilíbrio da placa *ABC*:

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad -Q \cdot a + Y_C \cdot a - X_C \cdot a = 0 \quad \Rightarrow \quad X_C = -\frac{M}{2a} - Q$$

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad X_A + Q + X_C = 0 \quad \Rightarrow \quad X_A = \frac{M}{2a}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_A = -Y_C \quad \Rightarrow \quad Y_A = \frac{M}{2a}$$

c) Diagrama de corpo livre da estrutura como um todo: