ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

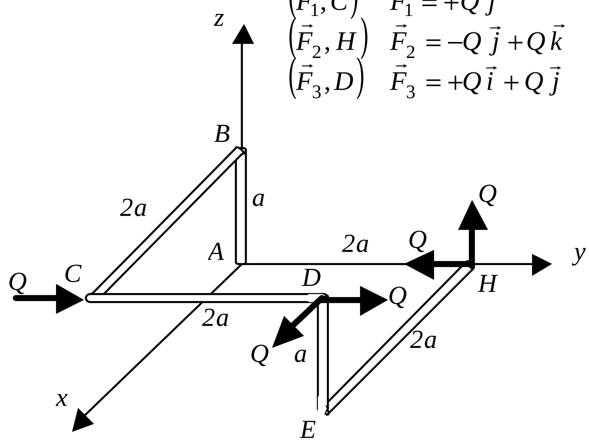
PME 2100 – MECÂNICA A

Primeira Prova – 20 de setembro de 2002 – Duração: 100 minutos
(importante: não é permitida a utilização de calculadoras)

GABARITO

Questão 1 (4,0 pontos) – A barra *ABCDEH* tem massa desprezível e está submetida ao seguinte sistema de forças:

$$\left(\vec{F}_1, C\right) \quad \vec{F}_1 = +Q\,\vec{j}$$
$$\left(\vec{F}_2, H\right) \quad \vec{F}_2 = -Q\,\vec{j} + Q\,\vec{k}$$
$$\left(\vec{F}_3, D\right) \quad \vec{F}_3 = +Q\,\vec{i} + Q\,\vec{j}$$



a) Determine a resultante $\vec{R}$, do sistema de forças.

b) Calcule o momento $\vec{M}_A$, do sistema de forças em relação ao pólo *A*.

c) Verifique se o sistema é redutível a uma única força.

d) Determine o sistema de forças que, se aplicado na barra, em adição ao sistema de forças original, equilibraria a barra. Este novo sistema de forças deve ser composto por um binário de momento $\vec{M}$ e uma força $\vec{F}$ aplicada em *B*.

Solução:

a) $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (Q\vec{j}) + (-Q\vec{j} + Q\vec{k}) + (Q\vec{i} + Q\vec{j})$

$$\boxed{\vec{R} = Q\vec{i} + Q\vec{j} + Q\vec{k}}$$

b) $\vec{M}_A = (C - A) \wedge \vec{F}_1 + (H - A) \wedge \vec{F}_2 + (D - A) \wedge \vec{F}_3$

$$\vec{M}_A = (2a\vec{i} + a\vec{k}) \wedge (Q\vec{j}) + (2a\vec{j}) \wedge (-Q\vec{j} + Q\vec{k}) + (2a\vec{i} + 2a\vec{j} + a\vec{k}) \wedge (Q\vec{i} + Q\vec{j})$$

$$\vec{M}_A = 2aQ\vec{k} - aQ\vec{i} + 2aQ\vec{i} + 2aQ\vec{k} - 2aQ\vec{k} + aQ\vec{j} - aQ\vec{i}$$

$$\boxed{\vec{M}_A = aQ\vec{j} + 2aQ\vec{k}}$$

c) Calculando o invariante:

$$I = \vec{M}_A \cdot \vec{R} = (aQ\vec{j} + 2aQ\vec{k}) \cdot (Q\vec{i} + Q\vec{j} + Q\vec{k}) = aQ^2 + 2aQ^2 = 3aQ^2 \neq 0$$

Como o invariante é diferente de zero, o sistema não pode ser reduzido a uma única força.

d) Para que o sistema de forças adicional equilibre a barra, ele deve ter resultante e momento opostos em relação ao sistema de forças original. Devemos reduzir o sistema de forças original utilizando o pólo B. Como a resultante já foi calculada, basta determinar o momento do sistema de forças original em relação ao pólo B. Utilizando a fórmula de mudança de pólo:

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + (A - B) \wedge \vec{R} = aQ\vec{j} + 2aQ\vec{k} + (-a\vec{k}) \wedge (Q\vec{i} + Q\vec{j} + Q\vec{k})$$

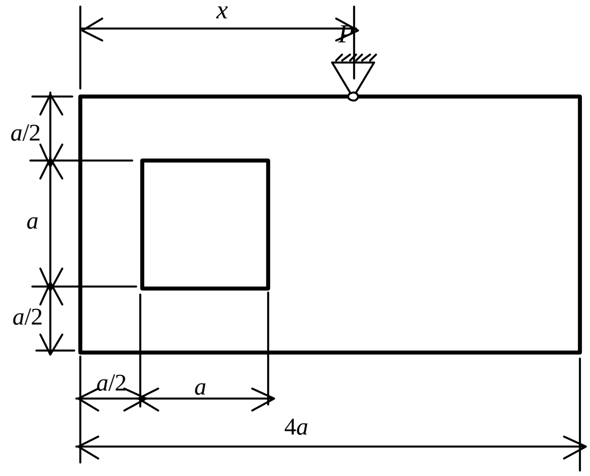
$$\vec{M}_B = aQ\vec{j} + 2aQ\vec{k} - aQ\vec{j} + aQ\vec{i}$$

$$\vec{M}_B = aQ\vec{i} + 2aQ\vec{k}$$

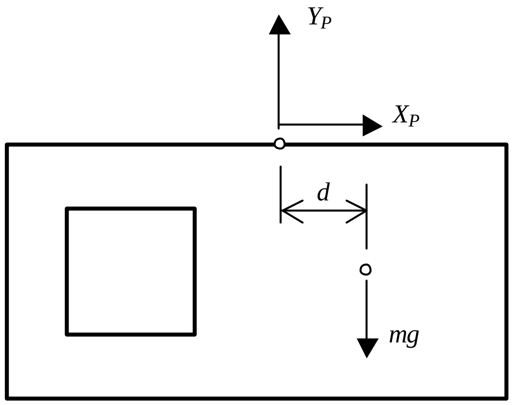
Assim o novo sistema de forças que adicionado ao sistema original equilibra a barra é: $(\vec{F}, B)$ e $\vec{M}$, onde:

$$\vec{F} = -\vec{R} \quad \text{e} \quad \vec{M} = -\vec{M}_B \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{F} = -Q\vec{i} - Q\vec{j} - Q\vec{k}} \qquad \boxed{\vec{M} = -aQ\vec{i} - 2aQ\vec{k}}$$

Questão 2 (2,0 pontos) – Uma placa retangular homogênea de lados 4*a* e 2*a*, e massa *m*, tem um furo quadrado de lado *a*, conforme mostra a figura ao lado. Esta placa é suportada por uma articulação em *P*. A que distância *x* da extremidade deve ser posicionada a articulação para a placa se equilibrar na posição indicada na figura sob a ação da gravidade?



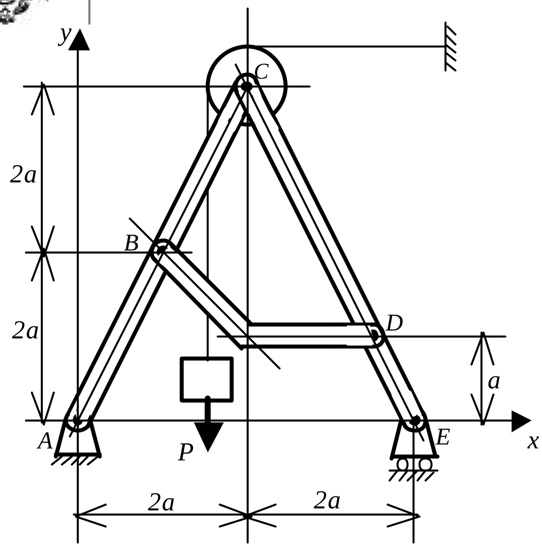
Solução:



Do equilíbrio é imediato que $X_P = 0$, $Y_P = mg$, e da equação de equilíbrio de momentos, "d" deve ser igual a zero, isto é, o baricentro deve estar posicionado verticalmente abaixo da articulação P. Adotando-se um sistema de coordenadas com origem no vértice inferior esquerdo da placa deve-se então ter:

$$x_G = x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{8a^2 \cdot 2a - a^2 \cdot a}{8a^2 - a^2}$$

$$\boxed{x = \frac{15a}{7}}$$

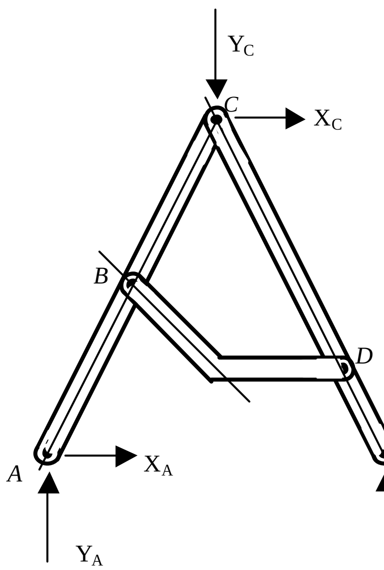


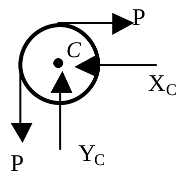
Questão 3 (4,0 pontos) – A estrutura é formada pelas barras *AC*, *BD* e *CE*, de peso desprezível. A polia e o fio, ideais, também têm peso desprezível. O fio sustenta um bloco de peso *P*.

a) Desenhe o diagrama de corpo livre da polia e o diagrama de corpo livre da estrutura formada pelas barras.

b) Determine as reações dos vínculos em *A* e *E*.

c) Determine todas as forças que atuam nas barras *AC*, *BD* e *CE*.





Do equilíbrio da polia é imediato que $X_C = P$ e $Y_C = P$.

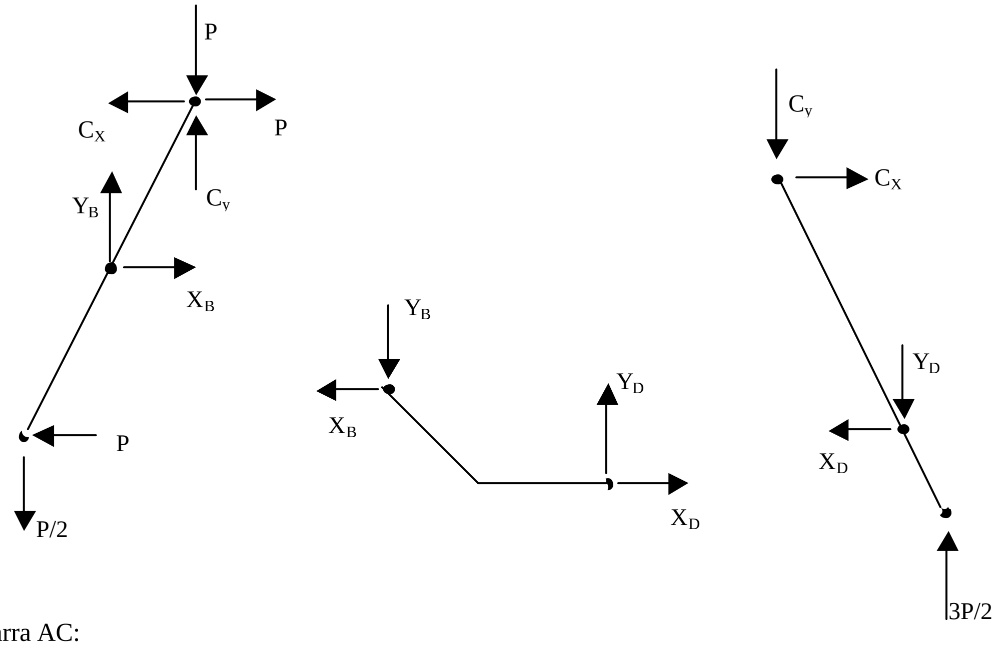
Do equilíbrio da estrutura formada pelas barras:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow X_A + X_C = 0 \Rightarrow X_A = -X_C \Rightarrow \quad \boxed{X_A = -P}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow Y_A + Y_E - Y_C = 0 \Rightarrow Y_A + Y_E = Y_C \Rightarrow Y_A + Y_E = P$$

$$\sum M_{zA} = 0 \Rightarrow 4aY_E - 4aX_C - 2aY_C = 0 \Rightarrow 4Y_E = 6P \Rightarrow \quad \boxed{Y_E = \frac{3P}{2}}$$

substituindo na anterior: $\boxed{Y_A = -\frac{P}{2}}$



Equilíbrio da barra AC:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow X_B - C_X + P - P = 0 \Rightarrow X_B = C_X \tag{1}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow Y_B + C_Y - P - \frac{P}{2} = 0 \Rightarrow Y_B + C_Y = \frac{3P}{2} \tag{2}$$

$$\sum M_{zC} = 0 \Rightarrow -aY_B + 2aX_B - 4aP + 2a\frac{P}{2} = 0 \Rightarrow 2X_B - Y_B = 3P \tag{3}$$

Equilíbrio da barra BD:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow X_B = X_D \tag{4}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow Y_B = Y_D \tag{5}$$

Equilíbrio da barra CE:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow C_X - X_D = 0 \tag{6}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -Y_D - C_Y + \frac{3P}{2} = 0 \Rightarrow Y_D + C_Y = -\frac{3P}{2} \tag{7}$$

$$\sum M_{zC} = 0 \Rightarrow -\frac{3a}{2}Y_D - 3aX_D + 2a\frac{3P}{2} = 0 \Rightarrow 6X_D + 3Y_D = 6P \tag{8}$$

subst. (4) e (5) em (8): $6X_B + 3Y_B = 6P \Rightarrow X_B = P - \frac{1}{2}Y_B$

subst. em (3): $2P - Y_B - Y_B = 3P \Rightarrow \boxed{Y_B = -\frac{P}{2}} \Rightarrow \boxed{Y_D = -\frac{P}{2}} \Rightarrow \boxed{X_B = \frac{5P}{4}} \Rightarrow \boxed{X_D = \frac{5P}{4}}$

subst. X_B em (1): $\boxed{C_X = \frac{5P}{4}}$

subst. Y_B em (2): $\boxed{C_Y = 2P}$