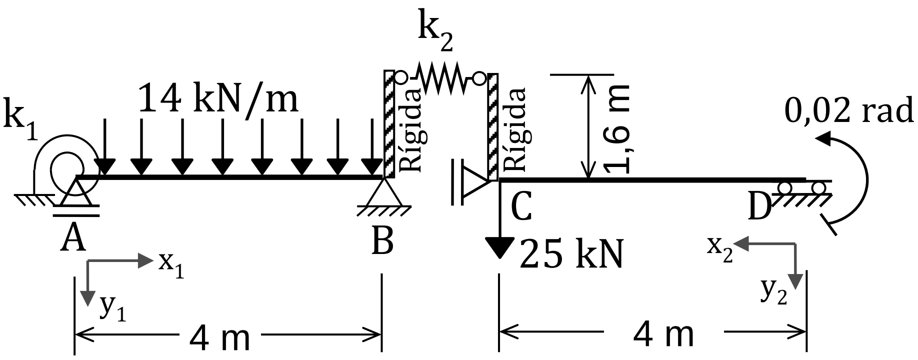
SET5875 – Introdução aos Métodos Numéricos – P1 – 17/4/2024

Nome: **N. USP:**

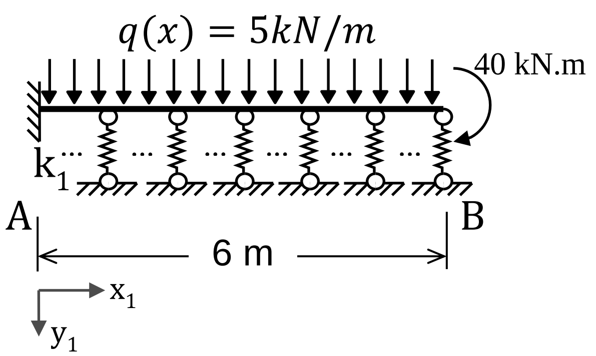
Questão 1 (5,0 pts) Encontrar solução aproximada para representar os deslocamentos de todos os pontos da estrutura indicada. Expresse o momento fletor a partir das funções de deslocamento obtidas. Utilize para tanto o Método de Rayleigh-Ritz, adotando polinômios completos que atendam minimamente às exigências da formulação. Considere os eixos de referência indicados e esquematize os deslocamentos que serão aproximados. Adote EI = 12.000 kN.m²; EA = 120.000 kN.m²; k_1 = 5.000 kN.m/rad; k_2 = 25.000 kN/m.



Questão 2 (5,0 pts) Para o sistema estrutural indicado, que consiste em uma viga engastada sobre base elástica, pede-se:

a) esquematizar o problema a ser resolvido, indicando o eixo de referência e deslocamento;
b) escrever as condições de contorno naturais e essenciais para a estrutura resultante do item (a);
c) escrever a energia potencial total para o problema do item (a);
d) partindo da energia potencial total obtida no item (c), escrever a forma fraca do problema;
e) adotando função teste $v(x) = a_0 + a_1x + a_1x^2 + a_3x^3$ e função peso $\delta v(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$, determine a expressão que representa os deslocamentos ao longo do comprimento da barra;
f) expresse o momento fletor a partir da função de deslocamentos obtida em (e).

São dados: EI = 24.000 kN.m²; k_1 = 2.000 N/m².



Gabarito

P1 2024

Qt 1 -

c.c.e - $v_1(0) = 0$

$v_1(4) = 0$

$v_2(0) = 0$

$v_2'(0) = 0{,}02$

funções - $v_1(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 . x_1^2$

$v_2(x_2) = b_0 + b_1 x_2 + b_2 x_2^2$

Assim: $v_1(0) = 0 \rightsquigarrow a_0 = 0$

$v_1(4) = 0 \rightsquigarrow 4a_1 + 16a_2 = 0 \rightsquigarrow a_1 = -4a_2$

$v_2(0) = 0 \rightsquigarrow b_0 = 0$

$v_2'(0) = 0{,}02 \rightsquigarrow b_1 = 0{,}02$

Ou seja $v_1(x_1) = -4a_2 x_1 + a_2 x_1^2$

$v_2(x_2) = 0{,}02 x_2 + b_2 x_2^2$

Funcional

$$\Pi(v_1, v_2) = \int_0^4 \frac{EI}{2} (v_1'')^2 \, dx_1 + \int_0^4 \frac{EI}{2} (v_2'')^2 \, dx_2 + \frac{K_1}{2} . (v_1'(0))^2 +$$

$$\frac{K_2}{2} \left(v_1'(4) . 1{,}6 + v_2'(4) . 1{,}6 \right)^2 - \int_0^4 14 . v_1(x_1) \, dx_1 - 25 v_2(4)$$

$$\tilde{\Pi}(a_2, b_2) = \int_0^4 \frac{12000}{2} (2a_2)^2 \, dx_1 + \int_0^4 \frac{12000}{2} (2b_2)^2 + \frac{5000}{2} . (-4a_2)^2 +$$

$$+ \frac{25000}{2} \left((-4a_2 + 8a_2) . 1{,}6 + (0{,}02 + 8b_2) . 1{,}6 \right)^2$$

$$- \int_0^4 14 \left(-4a_2 x_1 + a_2 x_1^2 \right) dx_1 - 25 \left(0{,}08 + 16 b_2 \right)$$

$$\tilde{\pi}(a_2, b_2) = 96000\, a_2^2 + 96000\, b_2^2 + 40000\, a_2^2 + 32000\,(4a_2 + 0{,}02 + 8b_2)^2 + 448\, a_2 - \frac{896\, a_2}{3} - 2 - 400 b_2$$

$$= 136000\, a_2^2 + 96000\, b_2^2 + 32000\,(4a_2 + 8b_2 + 0{,}02)^2 + \frac{448\, a_2}{3} - 2 - 400 b_2$$

$$\frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial a_2} = 0 \leadsto 272000\, a_2 + 64000\,(4a_2 + 8b_2 + 0{,}02).4 + \frac{448}{3} = 0$$

$$1296000\, a_2 + 2048000\, b_2 + \frac{15808}{3} = 0$$

$$\frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial b_2} = 0 \leadsto 192000\, b_2 + 64000\,(4a_2 + 8b_2 + 0{,}02).8 - 400 = 0$$

$$2048000\, a_2 + 4288000\, b_2 + 9840 = 0$$

Sistema:

$$\begin{bmatrix} 1296000 & 2048000 \\ 2048000 & 4288000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5269{,}33 \\ -9840 \end{Bmatrix} \leadsto \begin{Bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0{,}0017921 \\ -0{,}00143883 \end{Bmatrix}$$

Assim

$$v_1(x_1) = 0{,}0071685\, x_1 - 0{,}00179214\, x_1^2$$

$$M_1(x_1) = -EI\, v_1''(x_1) = 43{,}01 \text{ KNm}$$

$$v_2(x_2) = 0{,}02\, x_2 - 0{,}00143883\, x_2^2$$

$$M_2(x_2) = -EI\, v_2''(x_2) = 34{,}53 \text{ KNm}$$

2 - b)

c.c.e:

$v_1(0) = 0$

$v_1'(0) = 0$

c.c.n.

$-EI v_1''(6) = 40$

$-EI v_1'''(6) = 0$

c) $$\Pi = \int_0^6 \frac{EI}{2}\left(v_1''(x_1)\right)^2 dx_1 + \int_0^6 \frac{K_1}{2}\left(v_1(x_1)\right)^2 dx_1 - \int_0^6 5 \cdot v_1(x_1)\, dx_1 - 40\, v_1'(6)$$

d) $$\delta\Pi = \int_0^6 EI\, v_1''(x_1)\, \delta v_1''(x_1)\, dx_1 + \int_0^6 K_1\, v_1(x_1)\, \delta v_1(x_1)\, dx_1 - \int_0^6 5\, \delta v_1(x_1)\, dx_1 - 40\, \delta v_1'(6)$$

e) $v_1(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3$

$v_1(0) = 0 \rightsquigarrow a_0 = 0$

$v_1'(0) = 0 \rightsquigarrow a_1 = 0$

$\delta v_1(x_1) = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_1^2 + b_3 x_1^3$

$\delta v_1(0) = 0 \rightsquigarrow b_0 = 0$

$\delta v_1'(0) = 0 \rightsquigarrow b_1 = 0$

$$\delta\tilde{\Pi}^{(1)} = \int_0^6 24000\,(2a_2 + 6a_3 x_1)(2b_2 + 6b_3 x_1)\, dx_1 + \int_0^6 2000\,(a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3)(b_2 x_1^2 + b_3 x_1^3)\, dx_1 - \int_0^6 5\,(b_2 x_1^2 + b_3 x_1^3)\, dx_1 - 40(2b_2 . 6 + 3b_3 . 36)$$

$$= \int_0^6 24000\,(4a_2 b_2 + 12 a_2 b_3 x_1 + 12 a_3 b_2 x_1 + 36 a_3 b_3 x_1^2)\, dx_1 + \int_0^6 2000\,(a_2 b_2 x_1^4 + a_2 b_3 x_1^5 + a_3 b_2 x_1^5 + a_3 b_3 x_1^6)\, dx_1 - 360 b_2 - 1620 b_3 - 480 b_2 - 4320 b_3$$

$$\delta^{(1)}\tilde{\Pi} = 576000\, a_2 b_2 + 5184000\, a_2 b_3 + 5184000\, a_3 b_2 + 62208000\, a_3 b_3 + 3110400\, a_2 b_2 + 15552000\, a_2 b_3 + 15552000\, a_3 b_2 + 79981714{,}29\, a_3 b_3 - 840 b_2 - 5940 b_3$$

$$\frac{\partial(\delta^{(1)}\pi)}{\partial b_2} = 3686400\, a_2 + 20736000\, a_3 - 840 = 0$$

$$\frac{\partial(\delta^{(1)}\pi)}{\partial b_3} = 20736000\, a_2 + 142189714{,}29\, a_3 - 5940 = 0$$

Assim: $a_2 = -0{,}000396286$

$a_3 = 0{,}0000475543$

$$v_1(x_1) = -0{,}000396286\, x_1^2 + 0{,}0000475543\, x_1^3$$

$$M_f(x_1) = -EI\, v_1''(x_1) = 1{,}9022 - 6{,}8478\, x_1$$