MAT 1514 – MEB – A Matemática na Educação Básica
Segundo Semestre de 2023 – Profª Daniela
Licenciatura em Matemática – Noturno

Nome: GABARITO Nº USP:

PROVA SUBSTITUTIVA – 08/01/2024

Em todas as questões, justifique sua resposta!

Questão 1 (2,0) Para qualquer número racional $r > 0$, dizemos que os números $r+1$ e $\frac{r}{r+1}$ são **filhos de** r, e que os dois são **irmãos**.

(a) (1,0) Mostre que $\frac{3}{2}$ e $\frac{1}{3}$ são números irmãos e determine qual é o número racional r do qual eles são filhos.

(b) (1,0) Encontre um irmão de $\frac{5}{7}$.

Como $r>0$, observe que $r+1>1$ e $\frac{r}{r+1}<1$.

(a)

Então $\frac{3}{2}=r+1$ e $\frac{1}{3}=\frac{r}{r+1}$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$3=2r+2$ $r+1=3r$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$2r=1$ $1=2r$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$r=\frac{1}{2}$ $r=\frac{1}{2}$

iguais

$\frac{3}{2}$ e $\frac{1}{3}$ são irmãos, e são filhos de $r=\frac{1}{2}$.

(b) $\frac{5}{7}<1$ logo, $\frac{5}{7}=\frac{r}{r+1} \Rightarrow 5(r+1)=7r$

$5r+5=7r \Rightarrow 2r=5 \Rightarrow r=\frac{5}{2}$.

irmão de $\frac{5}{7}$ é $r+1=\frac{5}{2}+1=\frac{7}{2}$

Questão 2 (2,0)

(a) (1,0) Mostre que se a e b são números racionais e $b \neq 0$, então $a + b\sqrt{2}$ é um número irracional.

(b) (1,0) Mostre que $log_{10} 2$ é um número irracional.

(a) $a, b \in \mathbb{Q}$. Suponha que $a + b\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. Então

$$b\sqrt{2} = \frac{m}{n} - a$$

$$\sqrt{2} = \frac{m}{bn} - \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \text{ pois } \left\{ \begin{array}{l} m, n \in \mathbb{Z} \\ a, b \in \mathbb{Q} \end{array} \right.$$

mas isso é uma contradição pois $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Logo $a + b\sqrt{2}$ é um número irracional.

(b) Se $\log_{10} 2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow \log_{10} 2 = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$.

$$\therefore 10^{\frac{m}{n}} = 2 \Rightarrow 10^m = 2^n \Rightarrow (5 \cdot 2)^m = 2^n$$

$$\Rightarrow 5^m \cdot 2^m = 2^n \Rightarrow 5^m = 2^{n-m}.$$

Como 5 e 2 são primos, temos que

$$m = 0 \quad e \quad n - m = 0$$

O que implica que $n = m = 0$, mas $n \neq 0$.

Como chegamos a um absurdo, concluímos que $\log_{10} 2$ é um número irracional.

Questão 3 (3,0)

(a) (1,5) Laura quer comprar um violão em uma loja que oferece um desconto de 5% nas compras à vista, ou pagamento em três prestações mensais, sem desconto. Determine a taxa mensal de juros embutidos nas vendas a prazo, supondo o primeiro pagamento no ato da compra.

(b) (1,5) Luiz vai emprestar dinheiro a Marcos, por quatro meses, e pretende receber juros compostos de 12% ao mês. Como Marcos só pretende pagar juros simples, qual a taxa mensal de juros simples que deve ser cobrada por Luiz?

(a) Seja P o preço do violão. Então

$$0,95P = \frac{P}{3} + \frac{P}{3(1+i)} + \frac{P}{3(1+i)^2}$$

$$2,85 = 1 + \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2}$$

$$1,85 = \frac{1+i+1}{(1+i)^2} \Rightarrow 1,85(1+i)^2 = 2+i$$

$$1,85(1+2i+i^2) = 2+i$$

$$1,85i^2 + 3,7i + 1,85 - 2 - i = 0$$

$$1,85i^2 + 2,7i - 0,15 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2,7)^2 - 4(1,85)(-0,15) = 8,4$$

$$i = \frac{-2,7 \pm 2,9}{3,7}$$

$$\to \frac{-2,7+2,9}{3,7} = \frac{0,2}{3,7} = 0,054$$

$$\to \frac{-2,7-2,9}{3,7} \quad \text{não convém}$$

$i = 0,054$ ou $i = 5,4\%$.

(b) $i = 0{,}12$ juros compostos. Seja j a taxa a juros simples

Então $(1 + 0{,}12)^4 = (1 + 4j)$

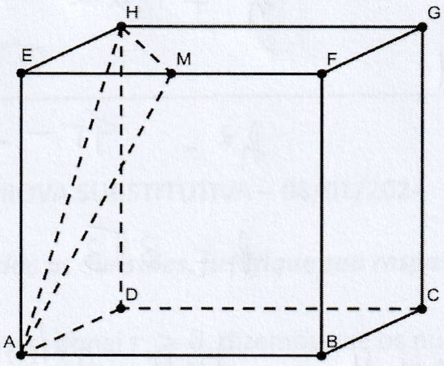
$$1{,}57 = 1 + 4j$$

$$0{,}57 = 4j$$

$$j = \frac{0{,}57}{4} = 0{,}1434$$

$$j = 14{,}34\%$$

Questão 4 (3,0) No cubo ABCDEFGH, cuja aresta mede 6cm, o ponto M é ponto médio de EF.

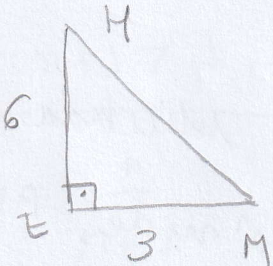


(a) (1,0) Calcule o volume da pirâmide AMHE.

(b) (1,0) Calcule a área do triângulo AMH. (Obs. O triângulo AMH não é retângulo!)

(c) (1,0) Calcule a medida da altura da pirâmide AMHE relativa à base AMH.

(a) Base: triângulo EMH



altura: EA

Volume $\dfrac{(\text{área da base}) \times (\text{altura})}{3} = \dfrac{3 \times 6}{2} \times 6 \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{36}{2} = 18\,cm^3$

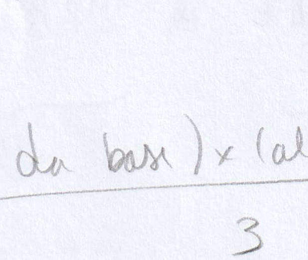
(b) lado AH é a diagonal do quadrado de lado 6cm,

logo $|AH| = 6\sqrt{2}$ cm.

lado HM, por Pitágoras, $(HM)^2 = 6^2 + 3^2 = 36 + 9 = 45$

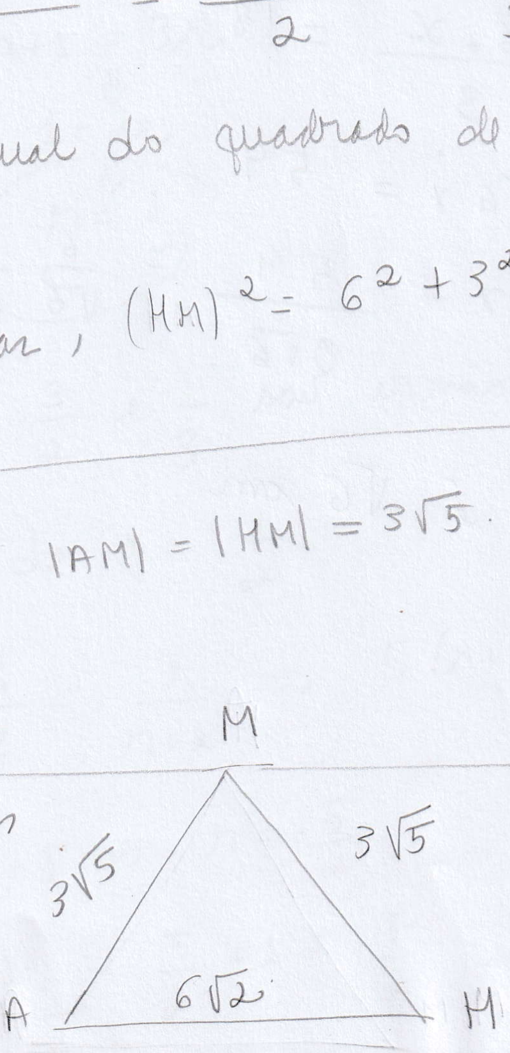
$HM = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ cm

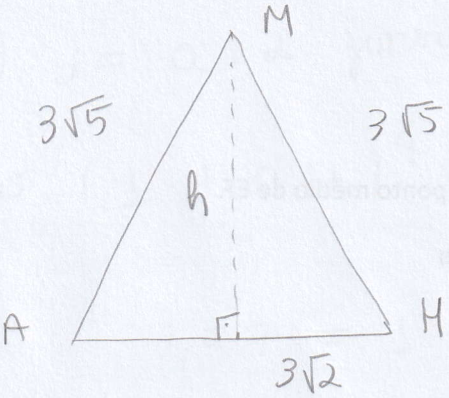
lado AM



$|AM| = |HM| = 3\sqrt{5}$

(c) triângulo AMH é isósceles





$h^2 + (3\sqrt{2})^2 = (3\sqrt{5})^2$

$h^2 + 9\times 2 = 9\times 5$

$h^2 = 45 - 18 = 27$

$h = 3\sqrt{3}$

área do triângulo AMH : $\dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \dfrac{6\sqrt{2} \times 3\sqrt{3}}{2}$

$= \dfrac{18\sqrt{6}}{2} = 9\sqrt{6}\ cm^2$

(c) Seja x a altura solicitada. Pelo item (a), temos que o volume da pirâmide AMHE é $18\ cm^3$.

Portanto $\dfrac{9\sqrt{6} \cdot x}{3} = 18$

$9\sqrt{6}\, x = 54$

$x = \dfrac{54}{9\sqrt{6}} = \dfrac{6}{\sqrt{6}} \cdot \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$

$\therefore$ a altura é $\sqrt{6}$ cm.