Física 1 – Ciências Moleculares

Caetano R. Miranda

crmiranda@usp.br

AULA 29 – 18/12/2023

Movimento de massa variável
Dinâmica de corpos rígidos
Movimento de Rolamento

Sugestão a ser implementada

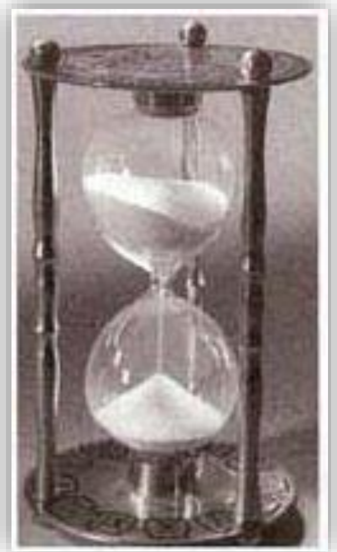
DATA	aula nº	Segundas (14:00h - 15:45h) - Sala Turma 33	DATA	aula nº	Quartas (14:00h - 15:45h) - Sala Turma 33	DATA	aula nº	Quintas (14:00h - 15:45h) - Sala Turma 33	
21/08	1	Apresentação do Curso	23/08	2	Experimentação 1 - Escalas	24/08	3	Escalas	
28/08	4	Experimentação 2 - Mov. em 1 D	30/08	5	Mov. em 1D	31/08	6	Mov. em 1D	
04/09			06/08			07/09		SEMANA TRABALHO	
11/09	7	Mov. em 1D	13/09	8	Mov. em 1D	14/09	9	Experimentação 3 - VR & Projéteis	ENTREGA 1
18/09	10	Mov. em 2D e 3D	20/09	11	Mov. em 2D e 3D	21/09		Paralisação	
25/09		Paralisação	27/09		Paralisação	28/09		Paralisação	
02/10		Paralisação	04/10		Paralisação	05/10		Paralisação	
09/10		Paralisação	11/10		Paralisação	12/10		FERIADO - N. S. Aparecida	
16/10		Paralisação	18/10		Paralisação	19/10		Paralisação	
23/10	12	Discussao - revisao	25/10	13	Mov. em 2D e 3D	26/10	14	Experimentação 4a - Dinâmica & Principia	
30/10	15	Principios da Dinâmica - Leis de Newton	01/11	16	Experimentação 5 - Energia e Trabalho	02/11		FERIADO - FINADOS	
06/11	17	PROVA I	08/11	18	Simetria e Conservação	09/11	19	Simetria e Conservação	ENTREGA 2
13/11	20	Resolução - P1	15/11		FERIADO - Republica	16/11	21	Energia e Trabalho	
20/11		FERIADO - Consciência Negra	22/11	22	Energia e Trabalho II	23/11	23	Energia e Trabalho III	
27/11	24	Resolução - Problemas	29/11	25	Revisão - P2	30/11	26	PROVA II	ENTREGA 3
04/12	27	Resolução P2	06/12	28	Conservação do Movimento	07/12	29	Experimentação 7 - Colisões	
11/12	30	Rotação e Momento Angular	13/12	31	Dinâmica de corpos rígidos (Demo)	14/12	32	Dinâmica de corpos rígidos	
18/12	33	Experimentação 9 - Aprendizado de Máquina	20/12	34	PROVA SUB	21/12		ENTREGA - FINAL - VISTA SUB	ENTREGA 4
		Forças de Interação - Sala Invertida							

Rocket science

Massa Variável

Definição de Newton para a Segunda Lei:

$$\boxed{\vec{F}_{res} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$



$$\vec{F}_{res} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\vec{v}$$

$$\vec{F}_{res} - \frac{dm}{dt}\vec{v} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

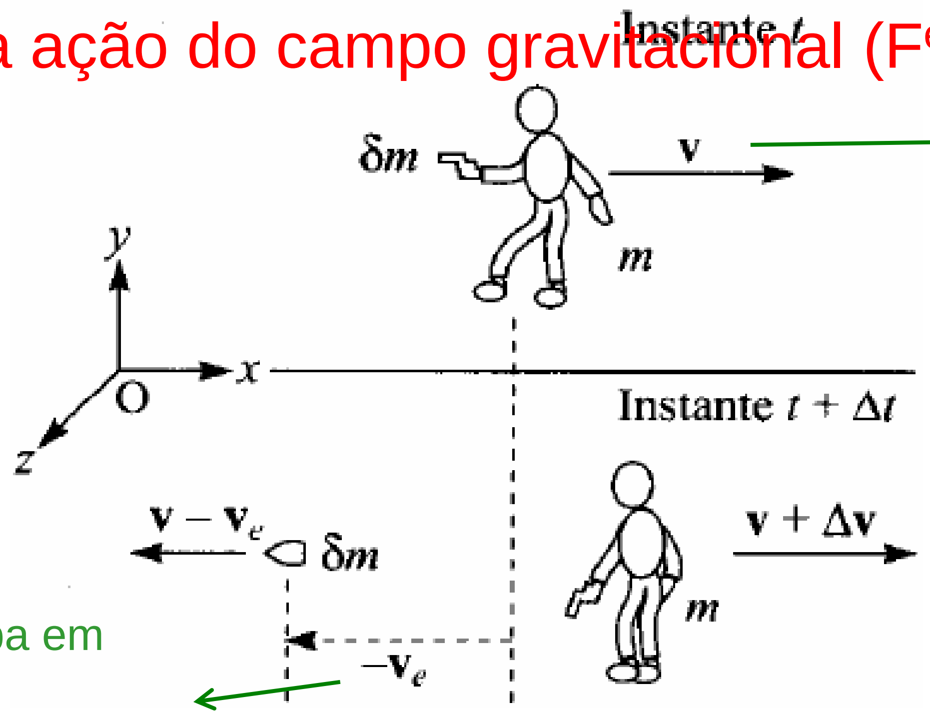
Corpo pode ser impulsionado sob a ação puramente de forças internas!

A taxa de variação da massa, multiplicada pela velocidade da massa variante, tem dimensão de Força e recebe o nome de ***Empuxo****.*

Exemplo

- Astronauta flutuando longe da ação do campo gravitacional ($F^{ext}=0$)

- Dispara revólver



Velocidade do astronauta em relação a um referencial inercial

Velocidade que a bala escapa em relação ao revólver

Massa inicial: $$M(t) = m + \delta m$$

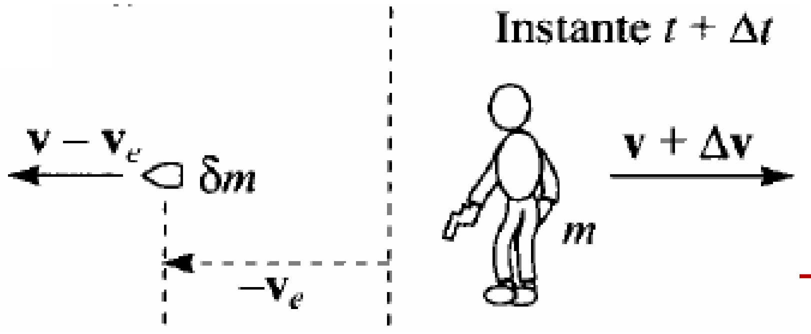
$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}_{12} = \mathbf{v}_{12}(t) = \mathbf{v}_2(t) - \mathbf{v}_1(t)$$

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 = \mathbf{v} \\ \mathbf{v}_{12} = -\mathbf{v}_e \end{cases}$$

$$\boxed{\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_{12} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_e}$$

Velocidade da bala em relação ao referencial inercial

❑ No instante (t+Δt), para o astronauta + revólver:



$$\begin{cases} M(t+\Delta t) = m \\ \mathbf{v}(t+\Delta t) = \mathbf{v} + \Delta\mathbf{v} \end{cases}$$

$$\mathbf{P}(t) = (m + \delta m)\mathbf{v}$$

$$\mathbf{P}(t+\Delta t) = m(\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}) + \delta m(\mathbf{v} - \mathbf{v}_e)$$

❑ Conservação de Momento:

$$0 = \Delta\mathbf{P} = \mathbf{P}(t+\Delta t) - \mathbf{P}(t) = m\Delta\mathbf{v} - \delta m \mathbf{v}_e \xrightarrow{\Delta m = -\delta m} \boxed{\Delta\mathbf{v} = -\frac{\Delta m}{m}\mathbf{v}_e}$$

Velocidade de Recuo

Astronauta perdeu a massa da bala

❑ Substituir revolver $\Rightarrow$ Pistola de Jato (ejeta material continuamente)

❑ Massa do Astronauta + Pistola varia continuamente com o tempo

❑ Eq. Mov.:

$$m\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = -\frac{\Delta m}{\Delta t}\mathbf{v}_e$$

$$\Delta t \to 0 \implies m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a} = -\frac{dm}{dt}\mathbf{v}_e = \frac{dm}{dt}\mathbf{v}_{\text{rel}}$$

Velocidade relativa do jato de material em relação à pistola

$$\boxed{-\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_{\text{rel}}}$$

❑ Como m=m(t) é variável: $p(t) = m(t)\,\mathbf{v}(t)$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\mathbf{v}$$

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dm}{dt}\mathbf{v}_{rel}$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{dm}{dt}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_e) = \frac{dm}{dt}(\mathbf{v} + \mathbf{v}_{rel})$$

❑ Se além das forças internas já consideradas, existem também forças externas agindo sobre o sistema:

$$\boxed{\begin{aligned} m\frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{dm}{dt}\mathbf{v}_{rel} + \mathbf{F}^{(ext)} \\ \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= \frac{dm}{dt}(\mathbf{v} + \mathbf{v}_{(rel)}) + \mathbf{F}^{(ext)} \end{aligned}}$$

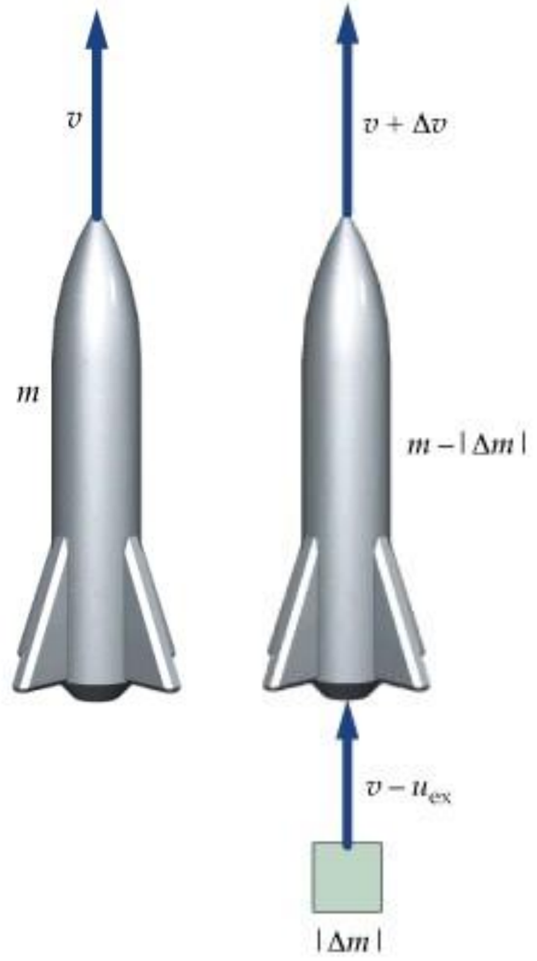
Velocidade, relativa ao sistema de massa variável, dos elementos de massa removidos (ou acrescentados)

Versão da Segunda Lei para sistemas com massa variável

Aplicação ao movimento de um foguete

- Foguete com massa (M) variando continuamente à medida que queima combustível.

- Foguete subindo na vertical com velocidade **v**



$$M_f = M_0 - Rt$$

- Taxa de queima de combustível: $R = -\dfrac{dM}{dt}$

Gases escapam com velocidade v_{rel} em relação ao foguete.

Sistema: foguete + combustível restante

- *Desprezado o arraste do ar:* $\vec{F}_R^{ex} = M\vec{g}$

$$\boxed{M\vec{g} - R\vec{u}_{ex} = M\frac{d\vec{v}}{dt}}$$

Força exercida sobre o foguete pelos gases da exaustão = **empuxo**

- Empuxo: $\vec{F}_{emp} = -R\vec{u}_{ex} = -\left|\frac{dM}{dt}\right|\vec{u}_{ex}$

- Deslocamento vertical para cima:

$$-M\vec{g} + R\vec{u}_{ex} = M\frac{d\vec{v}_y}{dt} \xrightarrow{\text{Isolando } dv_y/dt} \frac{dv_y}{dt} = \frac{Ru_{ex}}{M} - g$$

Contribuição do empuxo para a aceleração

Contribuição da força gravitacional para a aceleração

- Mas: $M_f = M_0 - Rt$

$$\boxed{\frac{dv_y}{dt} = \frac{Ru_{ex}}{M_0 - Rt} - g}$$

$$v_y = \left(\int_0^{t_f} \frac{Ru_{ex}}{M_0 - Rt} - g\right) dt$$

$$v_y = u_{ex} \int_0^{t_f} \frac{dt}{b - t} - \int_0^{t_f} g\, dt$$

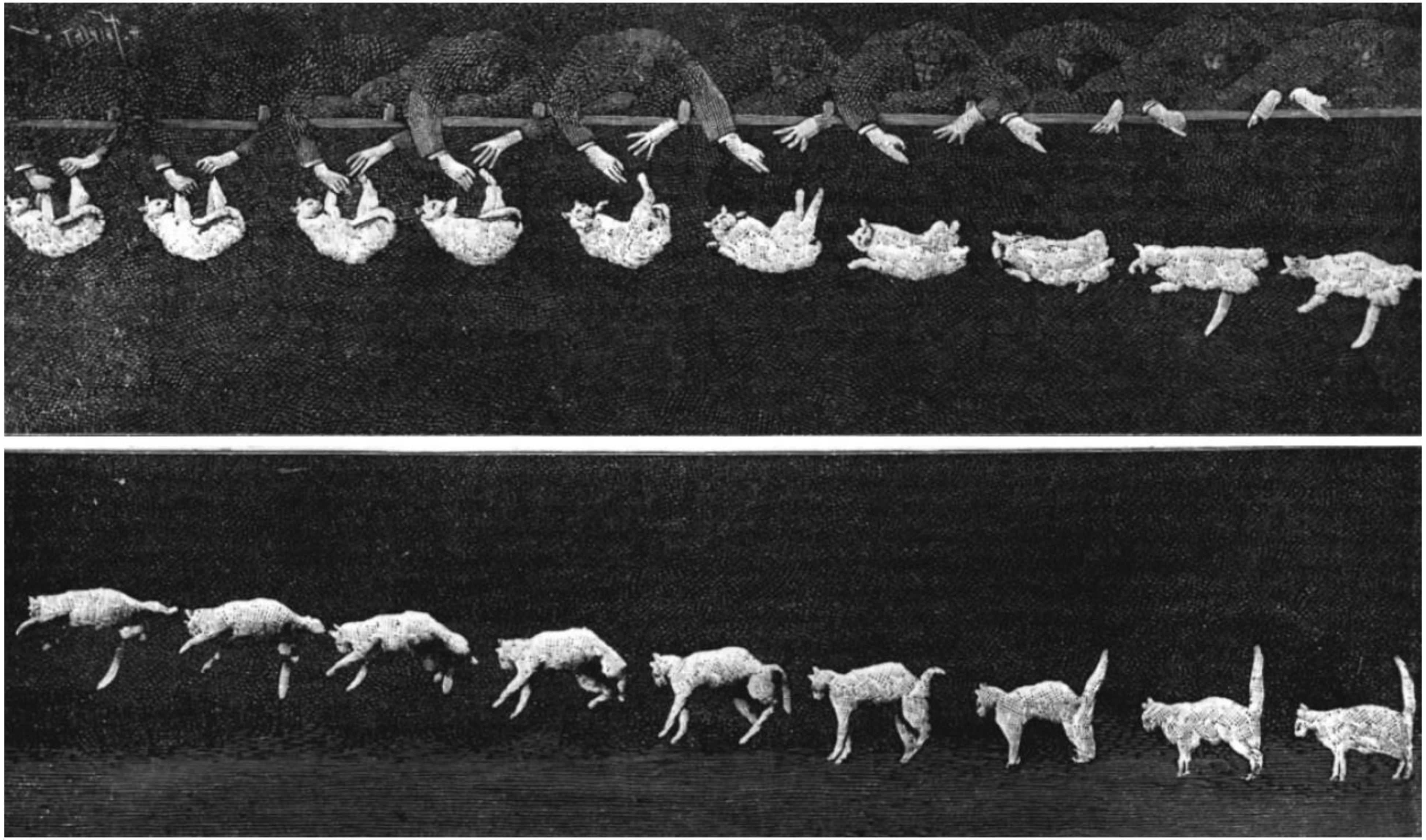
$$b = \frac{M_0}{R}$$

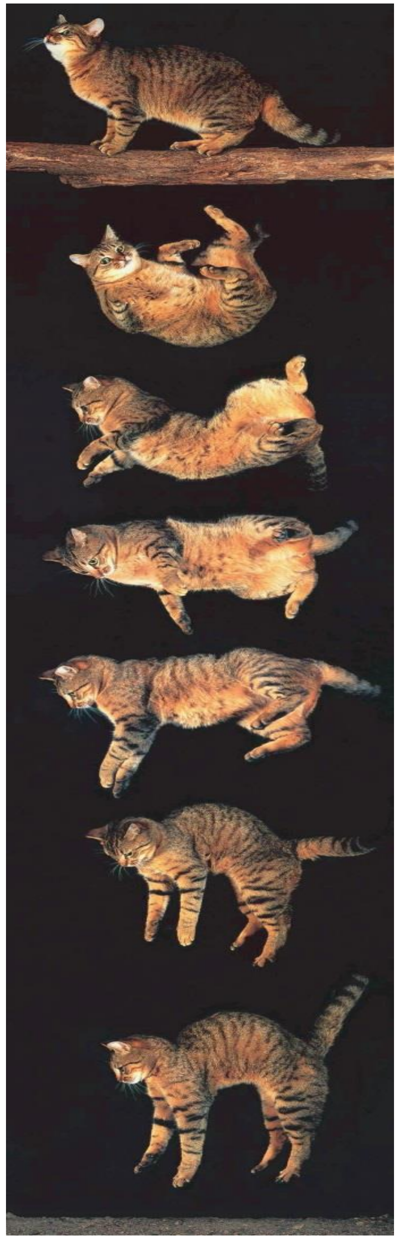
$$\int_0^t \frac{1}{b-t}\, dt = -\ln\frac{b-t}{b} = \ln\frac{b}{b-t}$$

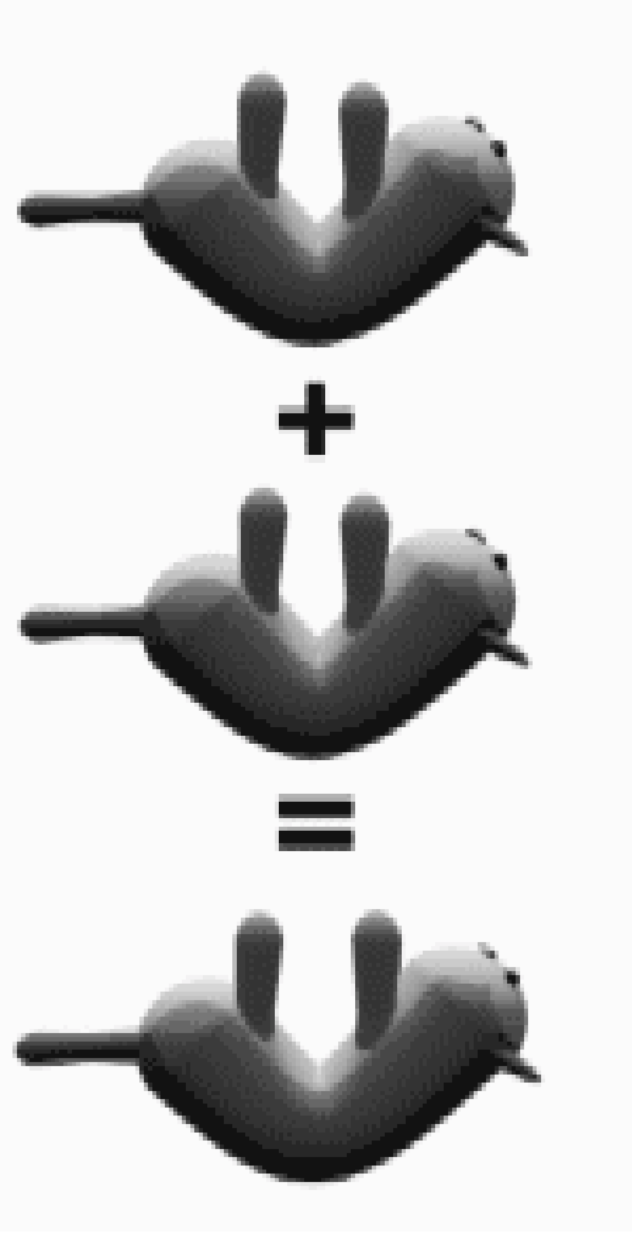
$$v_y = -u_{ex} ln \frac{b - t_f}{b} - g t_f$$

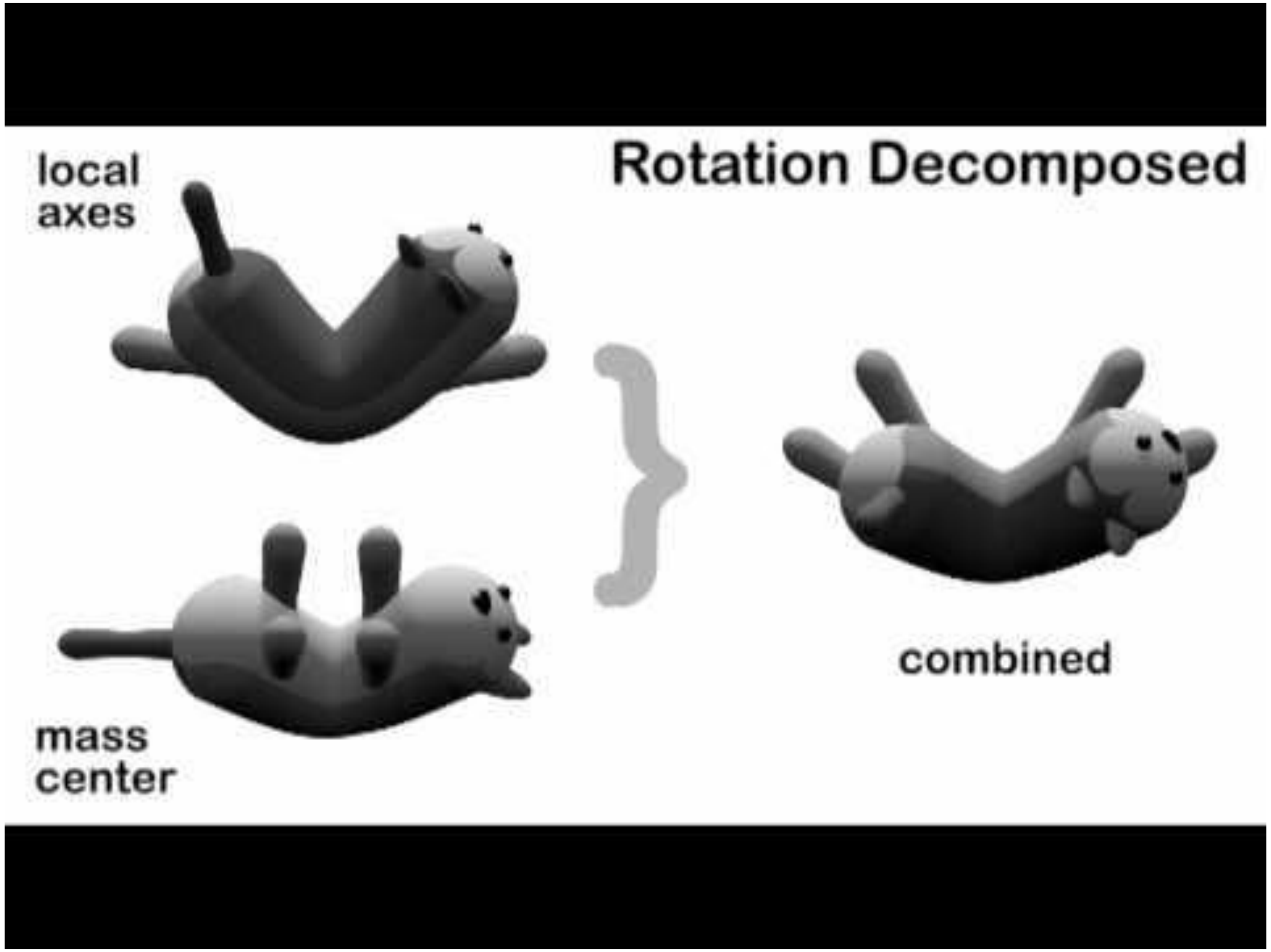
$$\boxed{v_y = -u_{ex} ln \left(\frac{M_0}{M_0 - Rt}\right) - gt}$$

A queda do gato ...

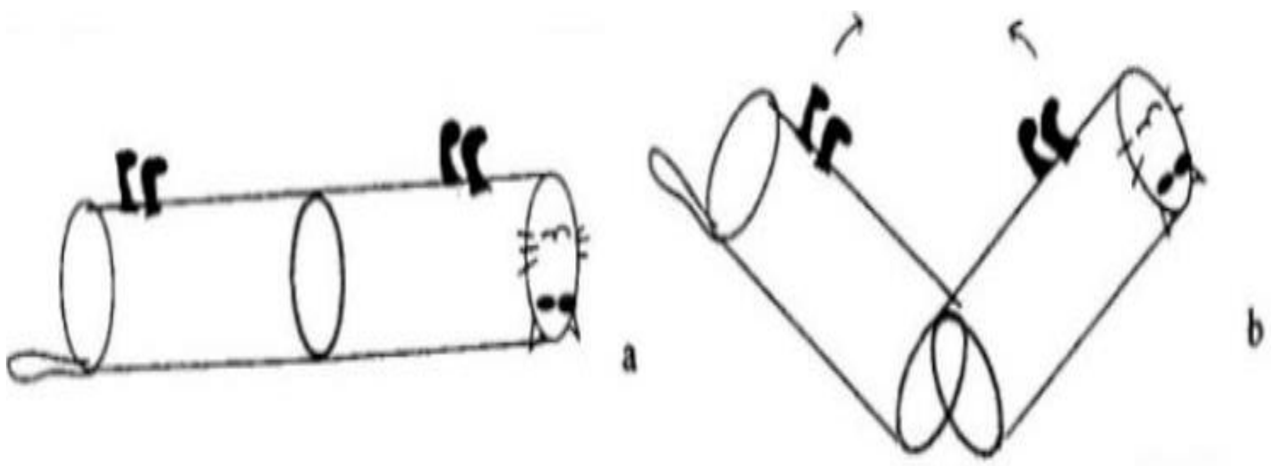


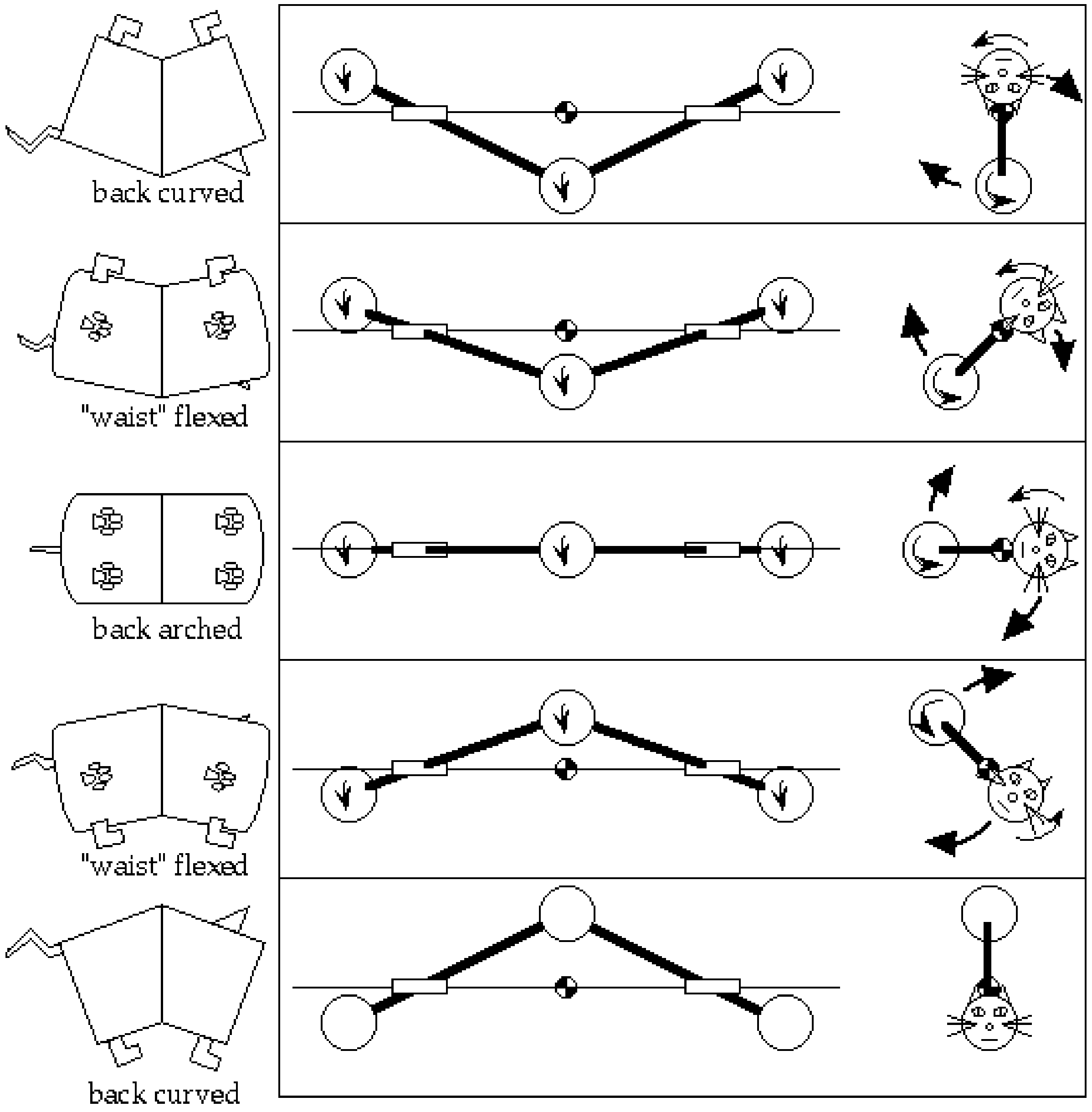


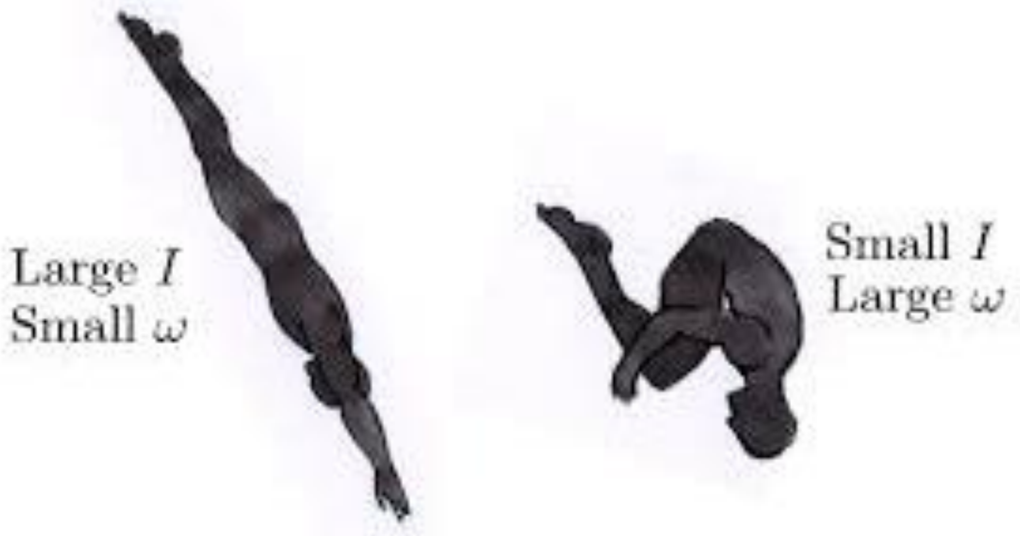



Rotation Decomposed
local
axes
mass
center
combined

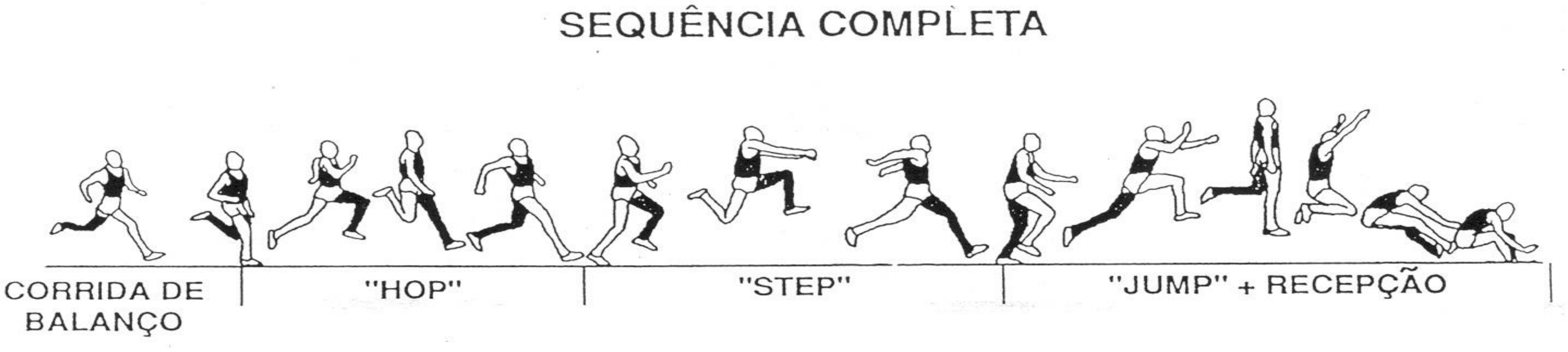
Modelo do gato: 2 cilindros em rotação

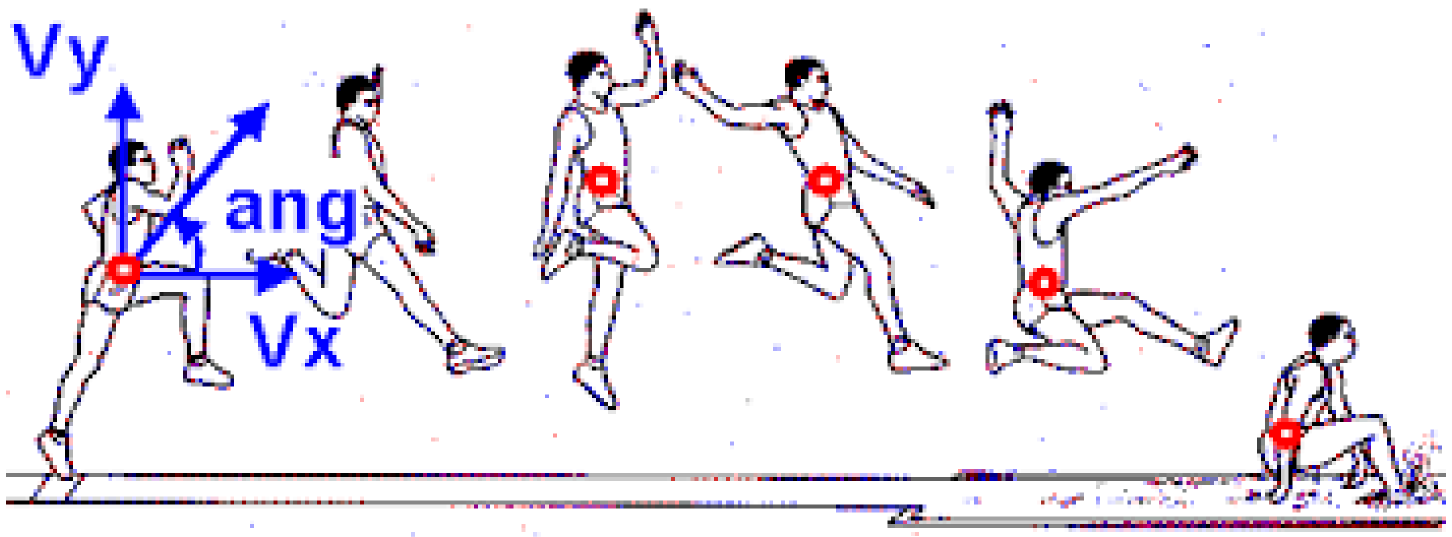




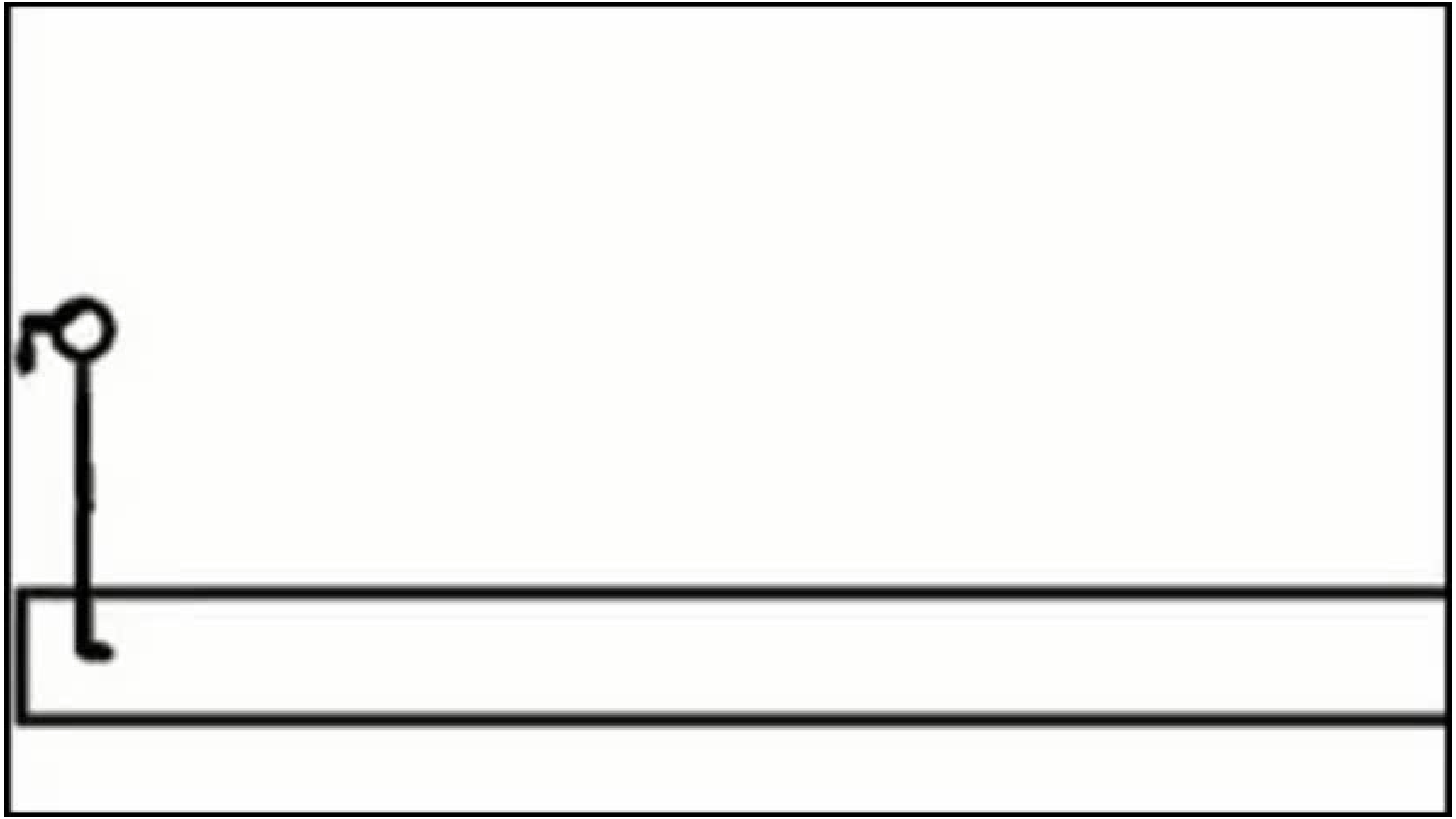

Large I
Small ω
Small I
Large ω

Salto em distância

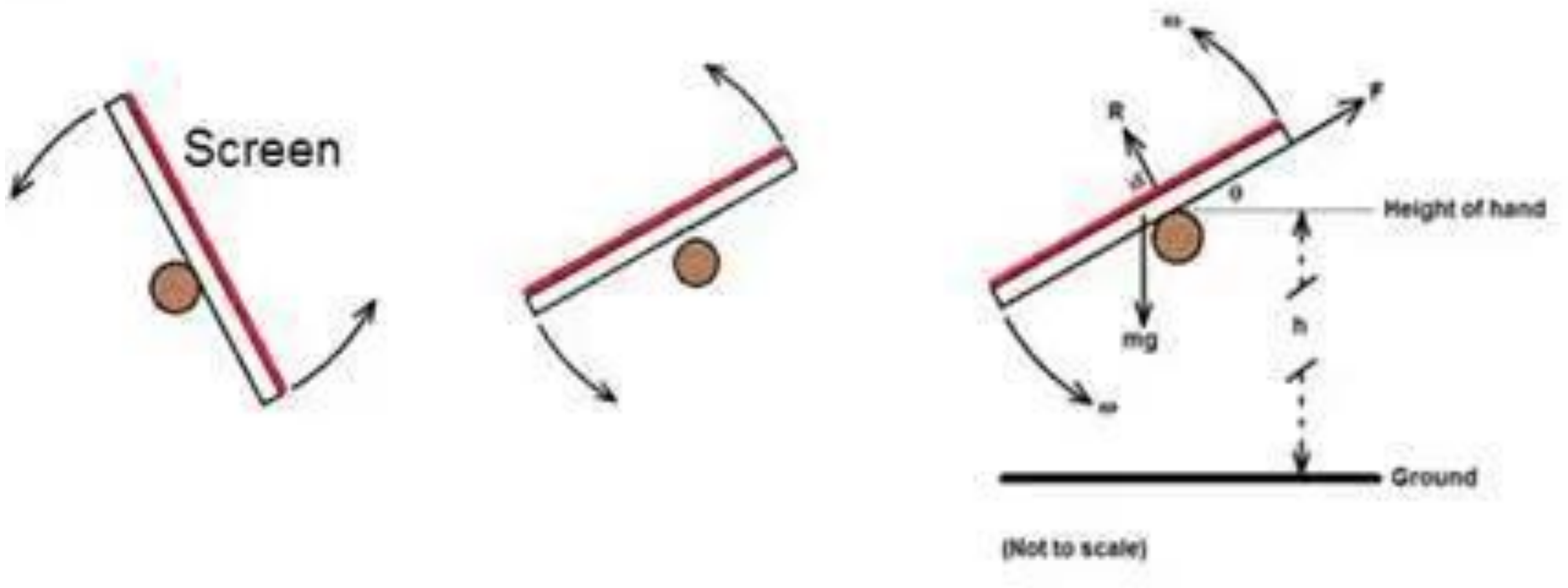




Ginástica olímpica



Problema da torrada / celular



$$\omega = 2\sqrt{\left(\frac{3g}{L}\right)\left[\frac{p}{1+3p^2}\right]sin\theta}$$

L é o comprimento do aparelho, g é a aceleração devido à gravidade, p = 2δ / L é o "parâmetro de saliência", δ é a distância saliência, e θ é o ângulo do aparelho quando se inicia a sua descida.

Ig Nobel – 1996

European Journal of Physics

Tumbling toast, Murphy's Law and the fundamental constants

R A J Matthews[1]

Published under licence by IOP Publishing Ltd
European Journal of Physics, Volume 16, Number 4
Citation R A J Matthews 1995 *Eur. J. Phys.* **16** 172
DOI 10.1088/0143-0807/16/4/005

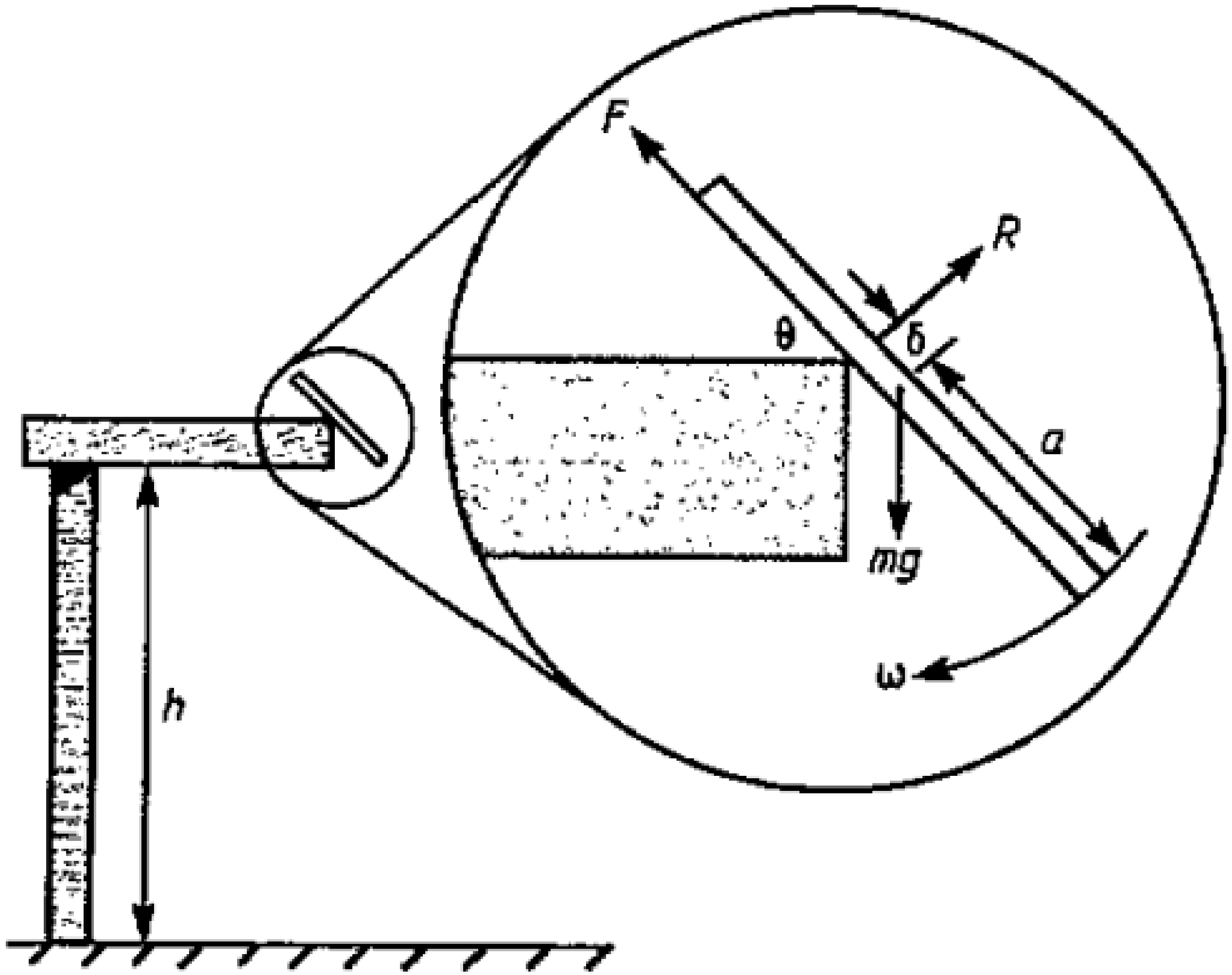
+ Article and author information

Abstract

We investigate the dynamics of toast tumbling from a table to the floor. Popular opinion is that the final state is usually butter-side down, and constitutes prima facie evidence of Murphy's Law ('If it can go wrong, it will'). The orthodox view, in contrast, is that the phenomenon is essentially random, with a 50/50 split of possible outcomes. We show that toast does indeed have an inherent tendency to land butter-side down for a wide range of conditions. Furthermore, we show that this outcome is ultimately ascribable to the values of the fundamental constants. As such, this manifestation of Murphy's Law appears to be an ineluctable feature of our universe.

PHYSICS: Robert Matthews of Aston University, England, for his studies of Murphy's Law, and especially for demonstrating that toast often falls on the buttered side.

Figure 1. The initial orientation of the rotating toast.



With these assumptions, the dynamics of the lamina are determined by the forces shown in figure 1: the weight, mg, acting vertically downward, the frictional force, F, parallel to the plane of the lamina and directed against the motion, and the reaction of the table, R. The resulting angular velocity about the point of contact, ω, then satisfies the differential equations of motion

$$m\delta\dot{\omega} = R - mg\cdot\cos\theta \quad (1)$$

$$m\delta\omega^2 = F - mg\cdot\sin\theta \quad (2)$$

$$m(k^2+\delta^2)\dot{\omega} = -mg\delta\cdot\cos\theta \quad (3)$$

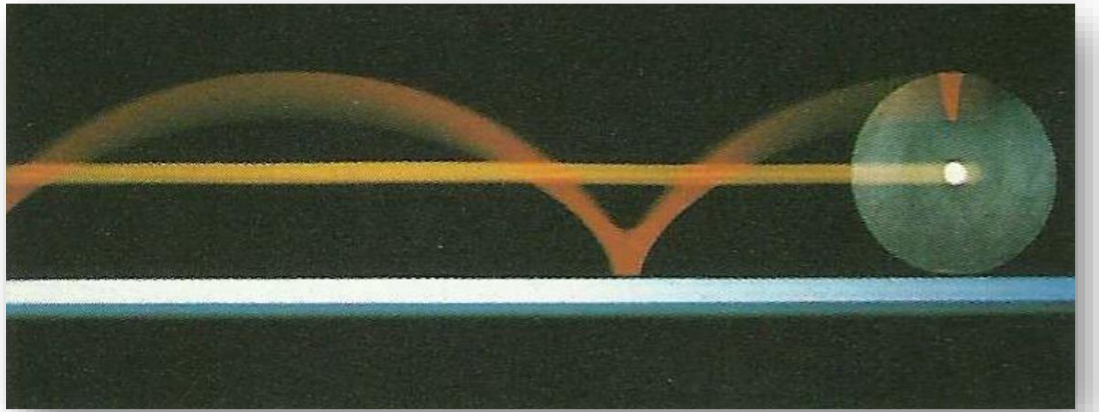
where k is the appropriate radius of gyration, such that $k^2 = a^2/3$ for the rectangular lamina considered here. Multiplying (3) by 2ω and integrating from the initial conditions $\omega = 0$ at $\theta = 0$ leads to:

$$\omega^2 = (6g/a)\cdot[\eta/(1+3\eta^2)]\cdot\sin\theta \quad (4)$$

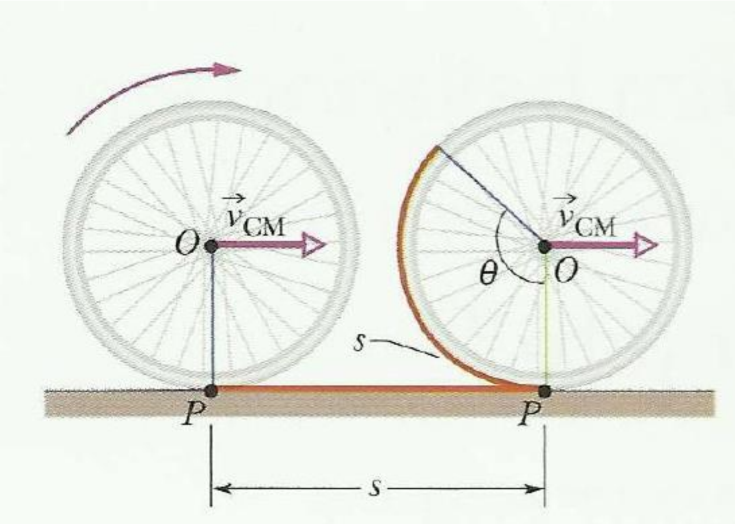
where we have used $\delta \equiv \eta a$, with η $(0 < \eta \leqslant 1)$ being the 'overhang parameter'. Equation (4) is the central equation of the tumbling toast problem, as it gives the rate of rotation of the toast once it has detached from the table from a specific state of overhang.

Rotação de um corpo rígido em torno de um Eixo Móvel

- Mistura do movimento de translação do CM com o movimento de rotação em torno de um eixo passando pelo CM.



- Cada ponto toca apenas uma vez no chão e a translação acompanha a rotação.



$$dS = d\theta R \qquad S = 2\pi R$$

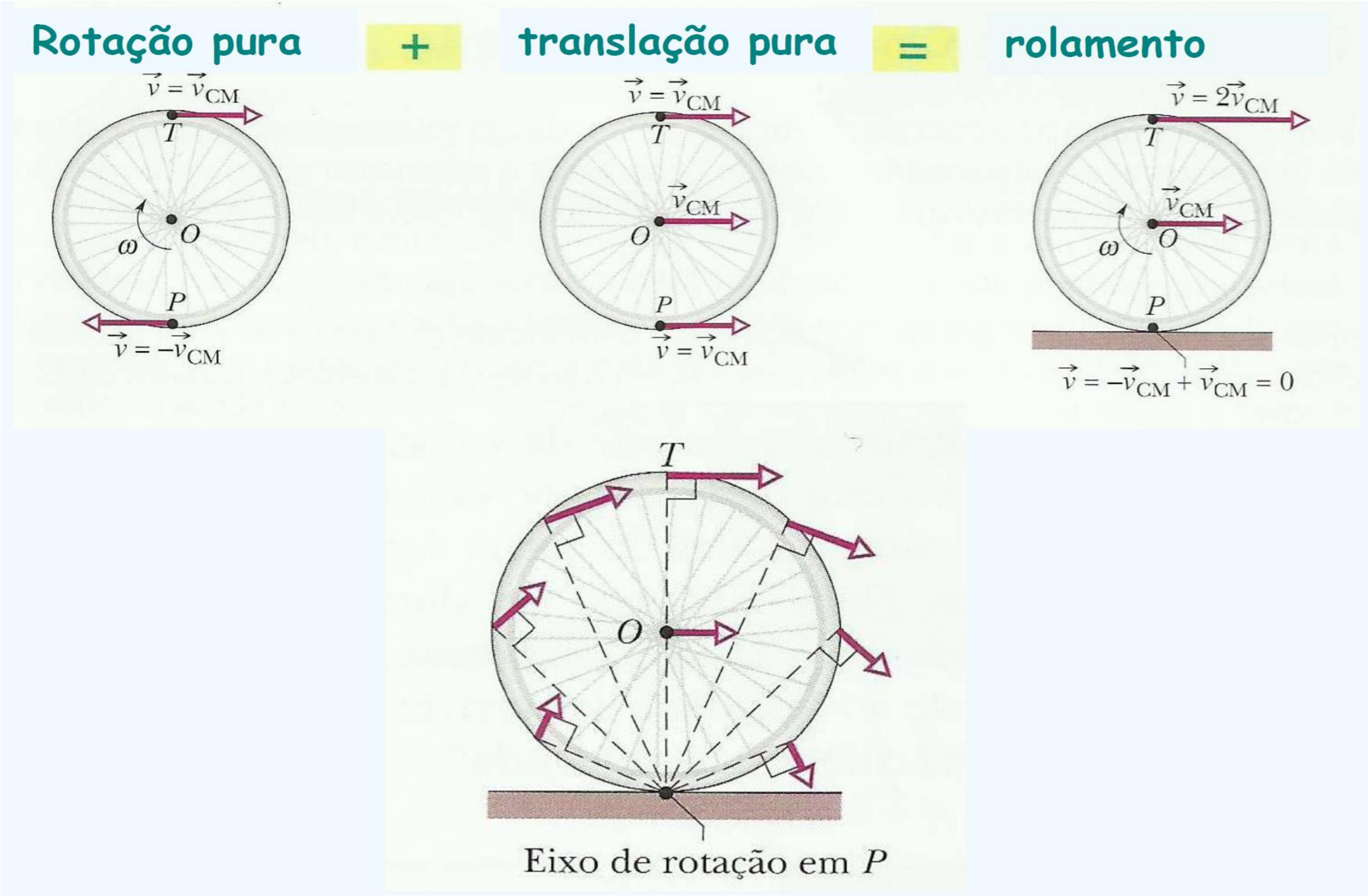
Condição para não deslizamento

$$v_{CM} = \omega R$$

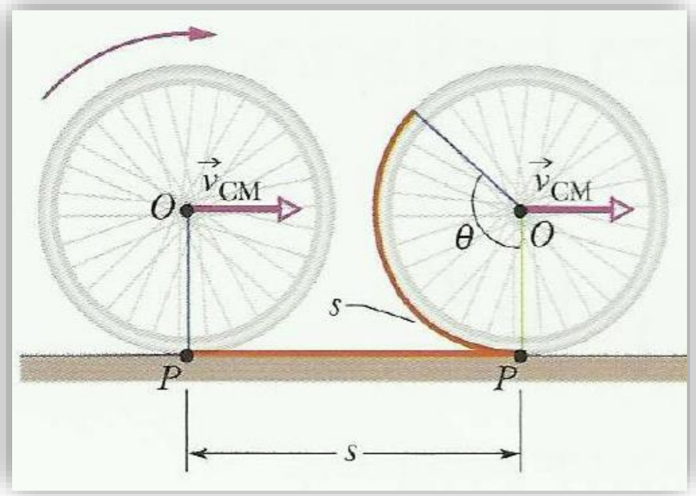
Velocidade de translação

Velocidade de rotação

Movimento de rolamento



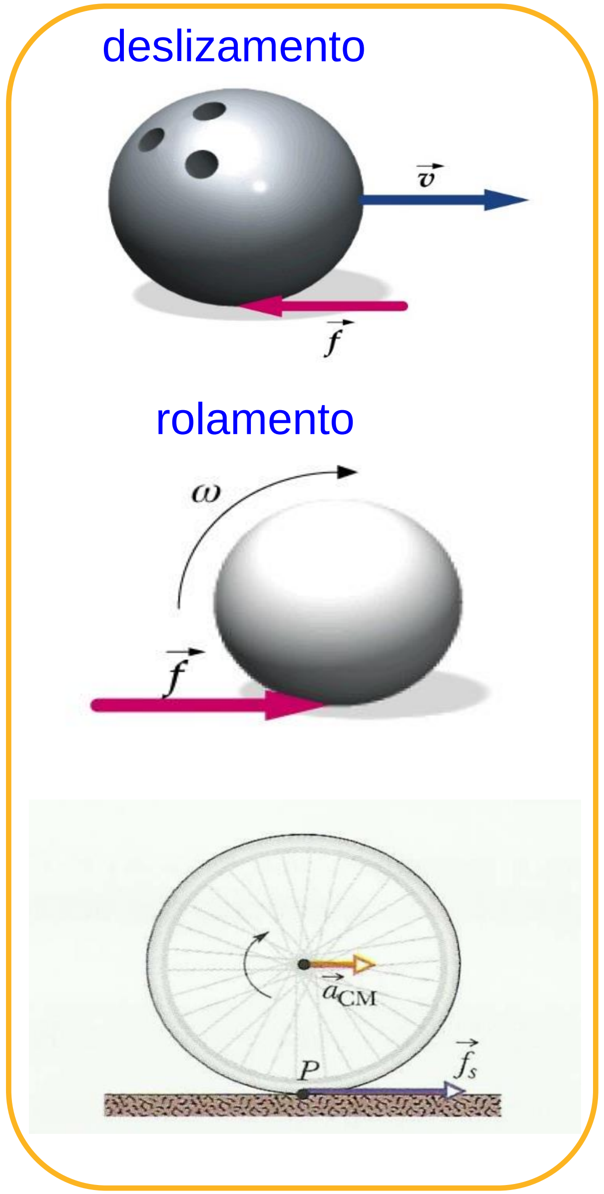
Dinâmica do Movimento Combinado



Atrito: força responsável pelo movimento de rolamento.

❑ Quando tem atrito estático (sem deslizamento no ponto de contato) se considera que não há perda de energia no sistema. O sistema é conservativo.

$$v_{CM} = \omega R \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_{cm} = \alpha R}$$



Condições para o rolamento sem deslizamento

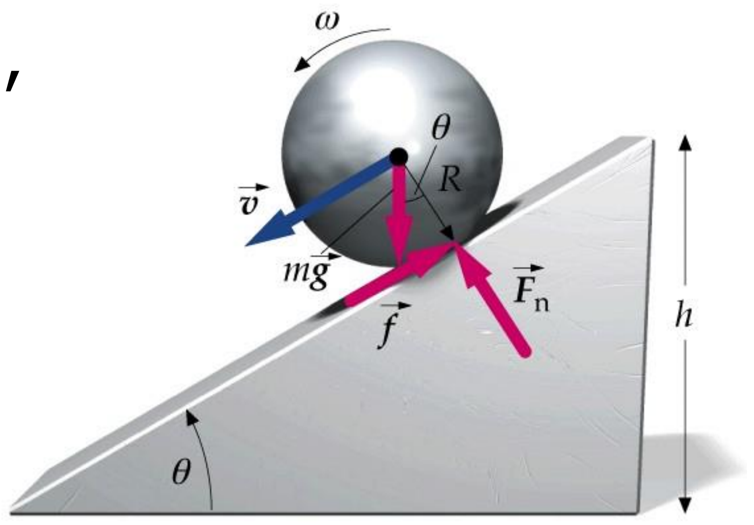
- Lei de Newton para translação: $$F_{res} = ma_{cm}$$

$$\boxed{\begin{aligned} v_{cm} &= \omega R \\ a_{cm} &= \alpha R \end{aligned}}$$

- Lei de Newton para rotação: $$\tau_{ext} = I_{cm}\alpha = F_{res}R$$

Rolamento sem deslizamento num plano inclinado

Objeto com seção transversal circular de raio R e massa m, desce rolando um plano inclinado com ângulo θ, sem deslizar



Aplicando a Segunda Lei de Newton:

rotação:

$$\tau_{ext} = I_{cm}\alpha = F_{at}R$$

$$F_{at} = \frac{I_{cm}}{R^2}a_{cm}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{a_{cm}}{R}}$$

translação:

$$F_{res} = mgsen\theta - F_{at} = ma_{cm}$$

$$mgsen\theta - \frac{I_{cm}}{R^2}a_{cm} = ma_{cm}$$

$$\boxed{a_{cm} = \frac{gsen\theta}{1 + \frac{I_{cm}}{mR^2}}}$$

Rolando de um plano inclinado: qual chega primeiro?

- Esfera: $I_{cm} = \frac{2}{5} mR^2$
- Cilindro: $I_{cm} = \frac{1}{2} mR^2$
- Anel: $I_{cm} = mR^2$

$$a_{cm} = \frac{g sen\theta}{1 + \frac{I_{cm}}{mR^2}} = g sen\theta \cdot k$$

$$\boxed{\begin{array}{l} esfera \mapsto k = 0.71 \\ cilindro \mapsto k = 0.66 \\ anel \mapsto k = 0.5 \end{array}}$$

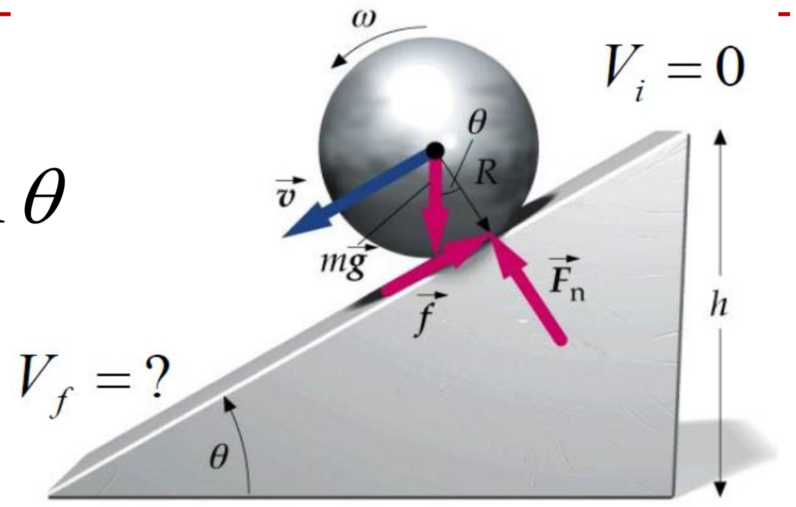
Esfera chega primeiro!

Qual a velocidade e energia cinética no final da rampa?

$$V_f^2 - V_i^2 = 2a\Delta S$$

$$V_f^2 = 2\frac{g\,\cancel{\sin\theta}}{1+\frac{I_{cm}}{mR^2}}\frac{h}{\cancel{\sin\theta}}$$

$$h = \Delta S.\sin\theta$$



$$\boxed{V_f^2 = 2gh.k}$$

$$T = \tfrac{1}{2}mV_f^2 + \tfrac{1}{2}I_{cm}\omega^2$$

$$k = \frac{1}{1+\frac{I_{cm}}{mR^2}}$$

$$I_{cm} = \left(\frac{1}{k} - 1\right)mR^2$$

$$\omega = \frac{V_f}{R}$$

$$T = \tfrac{1}{2}mV_f^2 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - 1\right)m\cancel{R^2}\left(\frac{V_f^2}{\cancel{R^2}}\right)$$

$$T = \cancel{\tfrac{1}{2}mV_f^2} + \tfrac{1}{2}\frac{1}{k}mV_f^2 - \cancel{\tfrac{1}{2}mV_f^2}$$

$$\boxed{T = mgh}$$

Força de atrito não realiza trabalho. No ponto de contato não há deslocamento.

Energia cinética final = Energia Potencial

Qual seria o maior ângulo para que não houvesse deslizamento?

$$\tau_{ext} = I_{cm}\alpha = F_{at}R$$

$$\boxed{I_{cm} = Mk^2}$$

$$\boxed{a_{cm} = \frac{gsen\theta}{1 + \frac{k^2}{R^2}}}$$

$$\boxed{a_{cm} = R\alpha}$$

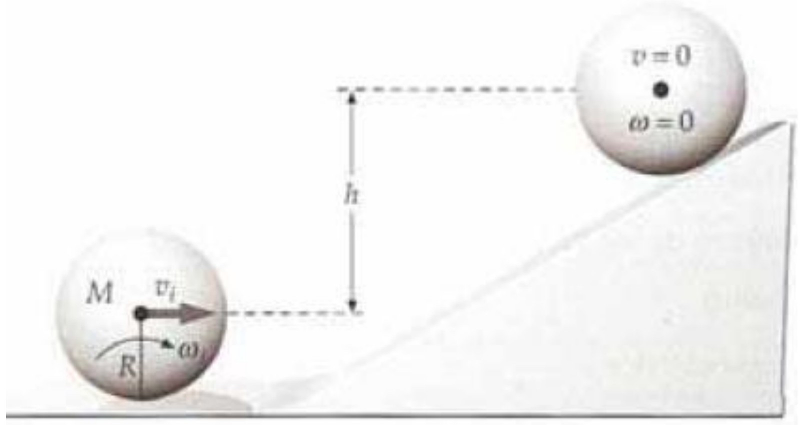
$$F_{at} = \frac{I_{cm}}{R^2}a_{cm} = \frac{Mk^2}{R^2}\frac{gsen\theta}{\left(1 + \frac{k^2}{R^2}\right)} = Mgsen\theta\frac{k^2}{(k^2 + R^2)}$$

Por outro lado: $F_{at} = \mu_e N$

$$\cancel{M}\cancel{g}sen\theta\frac{k^2}{(k^2 + R^2)} = \mu_e \cancel{M}\cancel{g}cos\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{tg\theta = \frac{(k^2 + R^2)}{k^2}\mu_e}$$

Exercício

Uma bola de boliche, com 11 cm de raio e 7,2 kg, rola sem deslizar a 2,0 m/s . Ela continua a rolar sem deslizar, ao subir uma rampa até a altura h, quando atinge o repouso. Determine h.



- *Atrito estático*
- *Não há perda de energia*
- *Sistema conservativo*

$$W_{ext} = \Delta E_{mec} - W_{nc}$$

$$0 = \Delta E_{mec} - 0$$

$$U_f + T_f = U_i + T_i$$

$$mgh + 0 = 0 + \frac{1}{2} m v_{cm_i}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega_i^2$$

$$I = \frac{2}{5} m R^2$$

$$h = \frac{7 v_{cm_i}^2}{10 g} = 29 cm$$