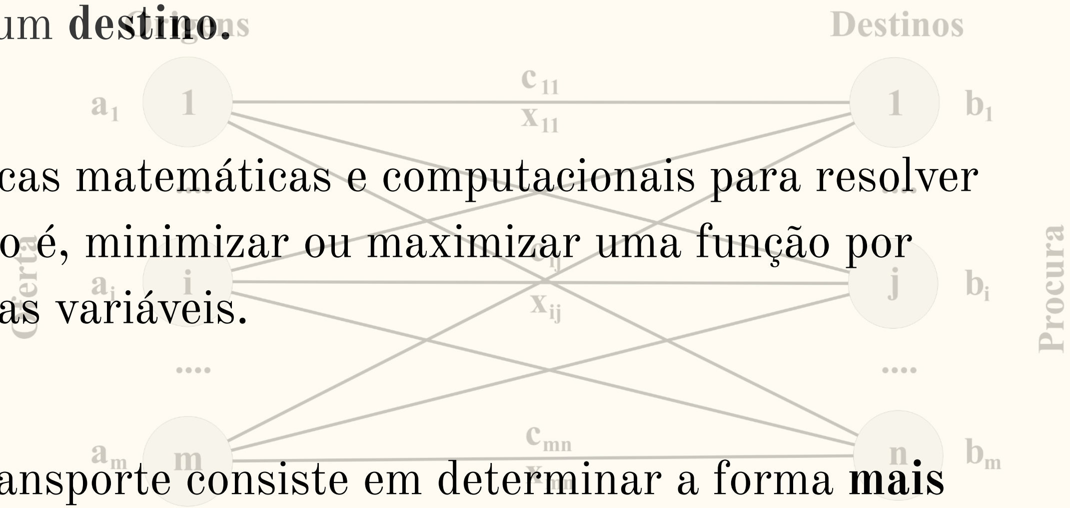
0313320 - Métodos Numéricos Aplicados à Engenharia Civil

Problemas de Transporte

Gabriel Beltrame	10774441
Gabriel Fernandes Dias	11808391
Isabel Caram de Souza	11820412
Isadora Gomes Barros	11820051
Matheus Carvalho Araujo	9838780

Contextualização

O problema de transporte é um **problema de programação linear** caracterizado por atribuir **quantidades** de uma mercadoria que serão **transportadas** de um determinado local de **origem** para um **destino.**



Programação Linear: uso de técnicas matemáticas e computacionais para resolver problemas de otimização linear, isto é, minimizar ou maximizar uma função por meio da escolha de valores para suas variáveis.

O **objetivo** geral do problema de transporte consiste em determinar a forma **mais eficiente** e com o menor custo.

Contextualização

Em 1939, o matemático russo Leonid Vitálievich Kantorovich e o holandês Tjalling Charles Koopmans, desenvolveram a teoria matemática chamada "Programação Linear". Durante os anos 1941 e 1942, Kantorovich e Koopmans estudaram o problema do transporte pela primeira vez, no qual usaram para sua solução métodos geométricos.

Em 1947, o matemático George Datzing desenvolveu o algoritmo do método Simplex.

Posteriormente o americano William R.Vogel desenvolveu o método de Vogel.

Definição

Definição

Problema de programação **linear** cujo objetivo é encontrar a maneira mais eficiente/lucrativa de se transportar algo (mais de um), de um ponto de origem (mais de um) para vários destinos.

Variáveis

x_{ij} – *variável da quantidade x de bens, de um ponto de origem i e destino j*

C_{ij} – *custo associado ao transporte de uma unidade, origem i e destino j*

Restrições

1. Oferta não pode ser maior que a capacidade do destino (demanda)
2. Demanda total não pode ser maior que a oferta
3. Não-negatividade

Definição

Função objetivo

$$z = \sum_i \sum_j C_{ij} \cdot x_{ij} \ - \textit{função objetivo, maximizar ou minimizar este valor}$$

Características

1. **Proporcionalidade:** o valor da função objetivo é diretamente proporcional ao nível de atividade de cada variável de decisão.
2. **Aditividade:** considera as variáveis de decisão do modelo como entidades totalmente independentes
3. **Divisibilidade:** assume que todas as unidades de atividade possam ser divididas em qualquer nível fracional
4. **Certeza:** assume que todos os parâmetros do modelo são constantes conhecidas.

Alguns métodos

Métodos para determinação de uma solução inicial...

Matriz de Transporte

Antes de discutir alguns métodos para a determinação de uma solução inicial, devemos organizar o problema e garantir as restrições.

DESTINO / ORIGEM	1	2	...	j	oferta
1	X_{11}	X_{12}	...	X_{1j}	=somatório(linha1)
2	X_{21}	X_{22}		X_{2j}	=somatório(linha1)
.	.			.	.
.	.			.	.
.	.			.	.
i	X_{i1}	X_{i2}	...	X_{ij}	=somatório(linha1)
demanda	=somatório(coluna1)	=somatório(coluna2)	...	=somatório(colunaj)	=somatório(oferta) =somatório(demanda)

Método do Menor custo

Um dos métodos para a determinação da **solução inicial** do problema de transporte, que fornece soluções iniciais mais próximas da solução ótima que o Método Canto Noroeste (não será abordado).

1. A variável básica escolhida é a variável com o menor custo;
2. Depois, será escolhida como variável básica a de menor custo no quadro resultante relativo ao que foi traçado, e assim sucessivamente, até terem sido traçadas todas as linhas e todas as colunas

Método de Vogel *(Vogel Approximation Method)*

Outro método para a determinação da **solução inicial** do problema de transporte, que se trata de um procedimento iterativo.

1. Para cada linha e coluna da matriz de transporte (origem x destino), determinar a diferença entre o menor custo e o segundo menor (penalidade);
2. Identificar a linha ou coluna com a maior penalidade;
3. Encontrar a célula de mínimo custo na linha ou coluna de maior penalidade;
4. Alocar, tanto quanto possível a célula identificada;
5. Eliminar dos cálculos restantes a linha ou coluna que foi satisfeita;
6. Recalcular as penalidades e repetir os passos.

Método Simplex

Um método que permite a maximização de uma função, sujeita a restrições em sistemas de inequações. Envolve um método interativo que busca a extração dos menores valores possíveis.

Passos:

1. Transformação da Função Objetivo e das restrições em igualdades;
2. Montagem da primeira tabela;
3. *Encontrar variável para compor a base (Gauss - Jordan);
4. Critério para definição das variáveis;
5. Alteração do elemento pivô;
6. Alteração da coluna pivô;
7. Análise da nova linha Z*

Método Simplex

Exemplo: Maximizar Z = 4X1 + 2X2

Sujeito à:

$$3X1 + 2X2 \leq 15$$
$$2X1 + X2 \leq 8$$
$$X2 \leq 6$$
$$X1,\ X2 \geq 0$$

Método Simplex

Primeiro passo:

$$Z - 4X1 - 2X2 = 0$$
$$3X1 + 2X2 + S1 = 15$$
$$2X1 + X2 + S2 = 8$$
$$X2 + S3 = 6$$
$$X1, X2 \geq 0$$

Segundo passo:

Z	X1	X2	S1	S2	S3	SOLUÇÃO
1	-4	-3	0	0	0	0
0	3	2	1	0	0	15
0	2	1	0	1	0	8
0	0	1	0	0	1	6

Método Simplex

Terceiro passo: Menor valor da linha z

Z	X1	X2	S1	S2	S3	SOLUÇÃO
1	-4	-3	0	0	0	0
0	3	2	1	0	0	15
0	2	1	0	1	0	8
0	0	1	0	0	1	6

Método Simplex

Quarto passo: Gauss - Jordan (selecionar a linha com menor quociente)

Z	X1	X2	S1	S2	S3	SOLUÇÃO	Quociente
1	-4	-3	0	0	0	0	-4/0 = 0
0	3	2	1	0	0	15	15/3 = 5
0	2	1	0	0	0	8	8/2 = 4
0	0	1	0	1	1	6	6/0 = infinito

Método Simplex

Quinto passo: Alteração da linha pivô

Z	X1	X2	S1	S2	S3	SOLUÇÃO	Quociente
1	-4	-3	0	0	0	0	0/-4 = 0
0	3	2	1	0	0	15	15/3 = 5
0	1	1/2	0	1/2	0	4	8/2 = 4
0	0	1	0	0	1	6	6/0 = infinito

Método Simplex

Sexto passo: Alterar coluna pivô

- Manter linha X1
- Nova linha Z = linha atual - coeficiente da linha pivô * nova linha pivô
- Nova tabela

Z	X1	X2	S1	S2	S3	SOLUÇÃO
1	0	-1	0	2	0	16
0	0	1/2	1	-3/2	0	3
0	1	1/2	0	1/2	0	4
0	0	1	0	0	1	6

Método Simplex

Terceiro passo: Menor valor da linha z

Quarto passo: Gauss - Jordan

Z	X1	X2	S1	S2	S3	SOLUÇÃO	Quociente
1	0	-1	0	2	0	16	16/-1=-16
0	0	1/2	1	-3/2	0	3	3/1/2 = 6
0	1	1/2	0	1/2	0	4	1/2/4 = 8
0	0	1	0	0	1	6	6/1 = 6

Método Simplex

Sexto passo: Alterar coluna pivô

- Manter linha X2
- Nova linha Z = linha atual - coeficiente da linha pivô * nova linha pivô
- Nova tabela

Z	X1	X2	S1	S2	S3	SOLUÇÃO
1	0	0	0	2	0	$\boxed{22}$
0	0	0	1	-3/2	-1/2	0
0	1	0	0	1/2	-1/2	$\boxed{1}$
0	0	1	0	0	1	$\boxed{6}$

$$\text{Max } Z = 4*1 + 3*6 = 22$$

Exemplo

Exemplo - Método Simplex

Fontes de Suprimento:

F1: 9 unidades
F2: 10 unidades
F3: 8 unidades

Total: 27 unidades disponíveis diariamente

Devem suprir

Armazéns (destino):

C1: 7 unidades
C2: 6 unidades
C3: 10 unidades
C4: 4 unidades

Total: 27 unidades de produtos demandados diariamente

Exemplo - Método Simplex

Matriz fornecida do custo de transporte (R$/unidade)

FÁBRICAS	C1	C2	C3	C4	Oferta
F1	10	7	6	5	9
F2	2	8	9	2	10
F3	11	12	8	4	8
Demanda	7	6	10	4	

Exemplo - Método Simplex

Matriz fornecida do custo de transporte (R$/unidade)

	C1	C2	C3	C4	Suprimento
F1	(10) x_{11}	(7) x_{12}	(6) x_{13}	(5) x_{14}	9
F2	(2) x_{21}	(8) x_{22}	(9) x_{23}	(2) x_{24}	10
F3	(11) x_{31}	(12) x_{32}	(8) x_{33}	(4) x_{34}	8
Demanda	7	6	10	4	

Exemplo - Método Simplex

$$\min C = 10x_{11} + 7x_{12} + 6x_{13} + 5x_{14} + 2x_{21} + 8x_{22} + 9x_{23} + x_{24} + 11x_{31} + 12x_{32} + 8x_{33} + 4x_{34}$$

sujeito a

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 9$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 10$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 8$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 7$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 6$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 10$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 4$$

$$x11 \geq 0, x12 \geq 0, \ldots, x34 \geq 0$$

	C1	C2	C3	C4	Suprimento
F1	(10) x_{11}	(7) x_{12}	(6) x_{13}	(5) x_{14}	9
F2	(2) x_{21}	(8) x_{22}	(9) x_{23}	(2) x_{24}	10
F3	(11) x_{31}	(12) x_{32}	(8) x_{33}	(4) x_{34}	8
Demanda	7	6	10	4	

Exemplo - Método Simplex

Passos do Simplex:

1. Encontre uma solução básica (factível) inicial;
2. Verifique se a solução é ótima;
3. Se não for ótima, encontre uma nova solução, a partir da atual, e volte ao passo anterior;
4. Se for ótima, interrompa.

Exemplo - Método Simplex

Matriz fornecida do custo de transporte (R$/unidade)

Processo do custo mínimo para o passo 1.:

a) Localize no quadro o menor c_{ij} que não tenha oferta ou demanda nula
b) Coloque na célula a maior quantidade permitida pela oferta e demanda correspondente
c) Atualize os valores da oferta e da demanda que foram modificadas pelo passo (b) e volte ao passo (a).
d) O processo se repete até que sejam esgotadas as ofertas e suprimidas as demandas de todos os destinos

Exemplo - Método Simplex

No exemplo, o menor c_{ij} que aparece é 1, na célula (2, 4)

Origem \ Destino	1	2	3	4	**Oferta**
1	10	7	6	5	9
2	2	8	9	1	10
3	11	12	8	4	8
Demanda	7	6	10	4	

Logo, nesta célula, atribui-se a quantidade máxima de unidades permitida, levando em conta a restrição de oferta e demanda;
Insere-se, assim, 4 unidades nesta célula, que é a demanda do destino 4, e atualiza-se a oferta da origem 2 para 6 unidades uma vez que 4 foram consumidas.

Exemplo - Método Simplex

Eliminando o destino 4 do quadro, o menor custo é igual a 2 e corresponde à célula (2, 1);
A esta célula, serão atribuídas 6 unidades, esgotando-se a oferta da origem 2 e diminuindo a demanda do destino 1 para 1 unidade.

Este processo se repete até que todas as ofertas sejam consumidas e todas as demandas atendidas, quando então encontramos uma solução inicial factível.

Origem \ Destino	1	2	3	4	**Oferta**
1	10	7	6 **9**	5	~~9~~
2	2 **6**	8	9	1 **4**	~~10~~ ~~6~~
3	11 **1**	12 **6**	8 **1**	4	~~8~~ ~~7~~ ~~1~~
Demanda	~~7~~ ~~1~~	~~6~~	~~10~~ ~~1~~	~~4~~	

Exemplo - Método Simplex

Destino / Origem	1	2	3	4	**Oferta**
1	10	7	6 **9**	5	~~9~~
2	2 **6**	8	9	1 **4**	~~10~~ ~~6~~
3	11 **1**	12 **6**	8 **1**	4	~~8~~ ~~7~~ ~~1~~
Demanda	~~7~~ ~~1~~	~~6~~	~~10~~ ~~1~~	~~4~~	

No exemplo, a solução inicial obtida foi: $x_{13} = 9$; $x_{21} = 6$; $x_{24} = 4$; $x_{31} = 1$; $x_{32} = 6$; $x_{33} = 1$

Nesse caso, o custo da solução inicial será $C = 161$

Exemplo - Método Simplex

Para verificar se a solução é ótima ou não com um método chamado **u-v**:
- É necessário eliminar as variáveis básicas da função objetivo e, para isso, devemos somar a ela múltiplos das restrições do modelo.

- Sejam u1, u2, . . . , um os valores que irão multiplicar as equações de oferta, antes de somá-las à função objetivo;
- Sejam v1, v2, . . . , vn os múltiplos análogos para cada restrição de demanda.

Conhecida uma solução viável básica, devemos ter: xij — ui — vj = 0 para cada uma das (m + n — 1) variáveis básicas, de modo a eliminá-las da função objetivo. Uma vez que o número de variáveis básicas é igual a (m + n — 1) vamos ter (m + n — 1) equações desse tipo; Uma vez que o número de incógnitas ui e vj é (m + n), temos (m + n — 1) equações, podemos atribuir um valor arbitrário a uma dessas variáveis sem violar as equações.

Exemplo - Método Simplex

Origem \ Destino	1	2	3	4	**Oferta**
1	10	7	6 **9**	5	~~9~~
2	2 **6**	8	9	1 **4**	~~10~~ ~~6~~
3	11 **1**	12 **6**	8 **1**	4	~~8~~ ~~7~~ ~~1~~
Demanda	~~7~~ ~~1~~	~~6~~	~~10~~ ~~1~~	~~4~~	

Temos as seguintes equações, para as variáveis básicas:

$x_{13} : 6 - u_1 - v_3 = 0$
$x_{21} : 2 - u_2 - v_1 = 0$
$x_{24} : 1 - u_2 - v_4 = 0$
$x_{31} : 11 - u_3 - v_1 = 0$
$x_{32} : 12 - u_3 - v_2 = 0$
$x_{33} : 8 - u_3 - v_3 = 0$

Exemplo - Método Simplex

Atribuindo um valor arbitrário a u1, descobrimos os demais valores de ui e vj . Por exemplo, para $u_1 = 0$, temos:

$v_1 = 9$
$v_2 = 10$
$v_3 = 6$
$v_4 = 8$
$u_1 = 0$
$u_2 = -7$
$u_3 = 2$

A partir dos valores de ui e vj , calcularemos os coeficientes das variáveis não-básicas da função objetivo. Ou seja: xij : xij — ui — vj . Para este exemplo, temos:

$x11 : 10 - 0 - 9 = 1$
$x12 : 7 - 0 - 10 = -3$
$x14 : 5 - 0 - 8 = -3$
$x22 : 8 + 7 - 10 = 5$
$x23 : 9 + 7 - 6 = 10$
$x34 : 4 - 2 - 8 = -6$

Exemplo - Método Simplex

Caso não seja ótima, iniciamos a busca por uma nova solução. Deve-se:

1. Determinar a variável que entra na base
2. Determinar variável que sai da base
3. Identificar a nova solução factível

Considerando apenas as variáveis não básicas, devemos escolher aquelas tais que $c_{ij} - u_i - v_j < 0$.
No exemplo, escolhemos x_{12}, x_{14} e x_{34};
Garantimos, assim, que o custo total seja reduzido.
Seguindo esse raciocínio, dentre as candidatas, escolhemos a de menor valor, ou seja, x_{34}, cujo coeficiente é -6.

Exemplo - Método Simplex

O aumento do valor da variável que entra na base dispara uma reação em cadeia para compensar mudanças nas demais variáveis básicas, de modo a continuar satisfazendo as restrições de oferta e demanda. A primeira variável básica que chegar a zero se torna a variável que deixa a base. Suponha que a variável x_{34} escolhida entrará na base com um valor $\theta \geq 0$, que deve ser o maior possível.

Origem \ Destino	1	2	3	4	**Oferta**
1	10	7	6 **9**	5	9
2	2 $6+\theta$	8	9	1 $4-\theta$	10
3	11 $1-\theta$	12 **6**	8 **1**	4 θ	8
Demanda	7	6	10	4	

Exemplo - Método Simplex

Devemos, agora, determinar o maior valor permitido a θ, isto é, o valor de θ que gera a variável básica que se anula mais rapidamente. Do quadro anterior, temos:

$x21: 6 + \theta$
$x24: 4 - \theta \geq 0 \therefore \theta \leq 4$
$x31: 1 - \theta \geq 0 \therefore \theta \leq 1$

Então $\theta = 1$ e x_{31} é a variável que sai da base, por ser a primeira a se anular.

A nova solução viável básica é identificada adicionando-se o valor de
θ no último quadro.
O valor da variável que sai é $x31 = 1$, e o quadro ficará:

Exemplo - Método Simplex

Origem \ Destino	1	2	3	4	**Oferta**
1	10	7	6 **9**	5	9
2	2 7	8	9	1 3	10
3	11 0	12 **6**	8 **1**	4 1	8
Demanda	7	6	10	4	

E o custo dessa solução será: C = 155
O método u-v é aplicado novamente para verificar se a solução é ótima e repetido até o necessário

Aplicações na Engenharia

Engenharia Civil - Logística e estoque

1. Principal método: Método de Vogel;

2. Essencial na otimização de rotas de transporte na logística de manufatura e gestão de estoque;

3. Atua no transporte eficaz de materiais e componentes para chegarem nos momentos certos, reduzindo necessidade de estoque e consequentes custos;

4. Permite lidar com diferentes tipos de materiais e requisitos específicos de produção.

Engenharia Elétrica - Distribuição de energia

1. Principal método: Método do Menor Custo;

2. Usado para otimizar a distribuição de energia em redes complexas:

    a. Em redes urbanas: determinação das rotas econômicas para alimentação de regiões distintas;

    b. Em redes de alta tensão: minimização de perdas pela otimização de rotas de longa distância;

3. Contribui no ganho de eficiência de distribuição energética em redes, minimizando perdas e aumentando a confiabilidade geral do sistema.

Engenharia de Produção - Gestão industrial

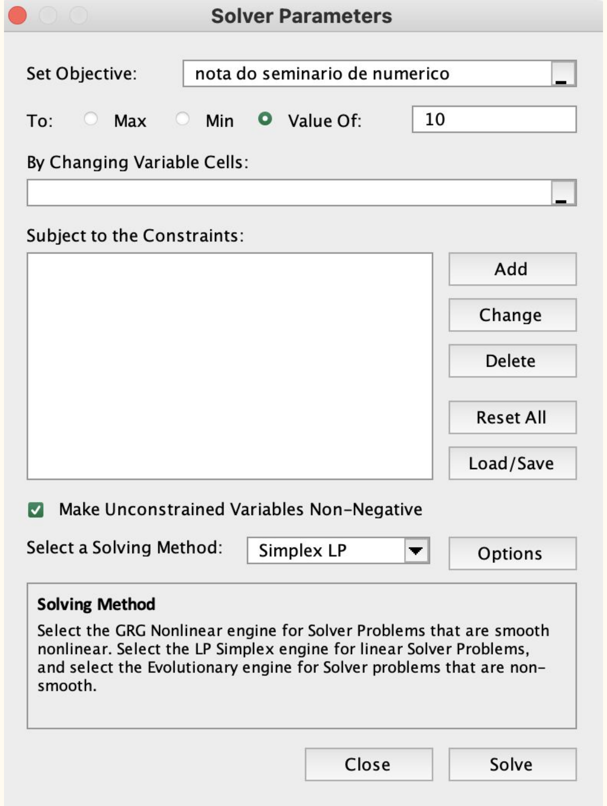
1. Principal método: Simplex;
2. Extensivamente utilizado na otimização do planejamento e programação de recursos
3. Exemplos de aplicação:
    a. Indústria automotiva: alocação de máquinas, recursos e mão-de-obra para maximizar a produção;
    b. Indústria química: planejamento de processos de produção, considerando restrições de insumos;
4. Flexível para lidar com problemas de programação linear complexos que envolvem múltiplas restrições.

Aplicações gerais - MS Excel Solver

1. Amplo uso do método Simplex na solução de problemas corriqueiros;

2. Âmbito acadêmico: muitas disciplinas da Poli requerem uso do Solver e conhecimento sobre o método Simplex (ainda que inconsciente);

3. Facilidade na aplicação e bons resultados.



Exercício

Exercício proposto

Um navio cargueiro pode ser carregado com duas cargas disponíveis para transporte entre dois portos: castanha-do-Pará (em sacos) e fios elétricos (rolos). O navio possui uma capacidade de 5.000 t úteis e 9.600 m3. Deseja-se determinar quanto transportar de cada uma das duas cargas, de modo a maximizar a receita total obtida.

Dados:

- Castanha do Pará:
  - 2,40 - fator de estiva (m3 /t)
  - 80 - receita frete unitário ($/t)
  - 6000 - carga máxima disp (t)
- Fios elétricos
  - 0,80 - fator de estiva (m3 /t)
  - 100 - receita frete unitário ($/t)
  - 3500 - carga máxima disp (t)

Obrigado!