

0313320 - Métodos Numéricos Aplicados à Engenharia Civil

MÉTODO DE RUNGE-KUTTA

Carolina Mendes Esposito - N°USP: 11734660

Felipe Bisognin - N°USP: 11821556

Paola Jossara Domingos - N°USP: 11858071

Thiago Fugii Moraes - N°USP: 10774312

Sumário

1. Histórico
2. Explicação do Método
3. Exemplificação do Método
4. Método de Runge-Kutta vs Método de Euler
5. Aplicação Computacional
6. Aplicações na Engenharia
7. Tarefa para Casa
8. Referências Bibliográficas

Histórico

O método de Runge-Kutta é uma técnica numérica amplamente utilizada para resolver equações diferenciais ordinárias (EDOs). Desenvolvido por Carl Runge e Martin Kutta no início do século XX, este método se tornou uma ferramenta fundamental em diversas áreas da ciência e engenharia.

O contexto histórico que levou ao desenvolvimento do método de Runge-Kutta está intrinsecamente ligado à necessidade de resolver equações diferenciais de forma eficiente. No final do século XIX e início do século XX, os cientistas e engenheiros enfrentavam desafios significativos ao tentar modelar e compreender fenômenos complexos que eram regidos por EDOs. Na ausência de soluções analíticas para muitos desses problemas, a busca por métodos numéricos precisos e eficientes tornou-se imperativa.

O método de Runge-Kutta é uma abordagem iterativa que calcula a solução de uma EDO em incrementos sucessivos. Sua popularidade cresceu rapidamente devido à sua precisão e eficiência em comparação com outros métodos numéricos da época. Ao longo dos anos, vários aprimoramentos e variações do método foram propostos, resultando em diferentes formas e ordens do método de Runge-Kutta.

Histórico

Carl Runge

Carl Runge (1871–1946) foi um matemático alemão cujas contribuições significativas para a teoria numérica o destacam como um pioneiro no campo. Nascido em Bremen, Alemanha, Runge dedicou-se ao estudo de equações diferenciais e métodos numéricos. Em 1895, publicou um trabalho descrevendo um método iterativo para a resolução de equações diferenciais ordinárias (EDOs), pavimentando o caminho para o desenvolvimento do que agora é conhecido como o método de Runge-Kutta. Seu trabalho estabeleceu as bases para abordagens numéricas que se tornariam cruciais em diversas disciplinas científicas e de engenharia.

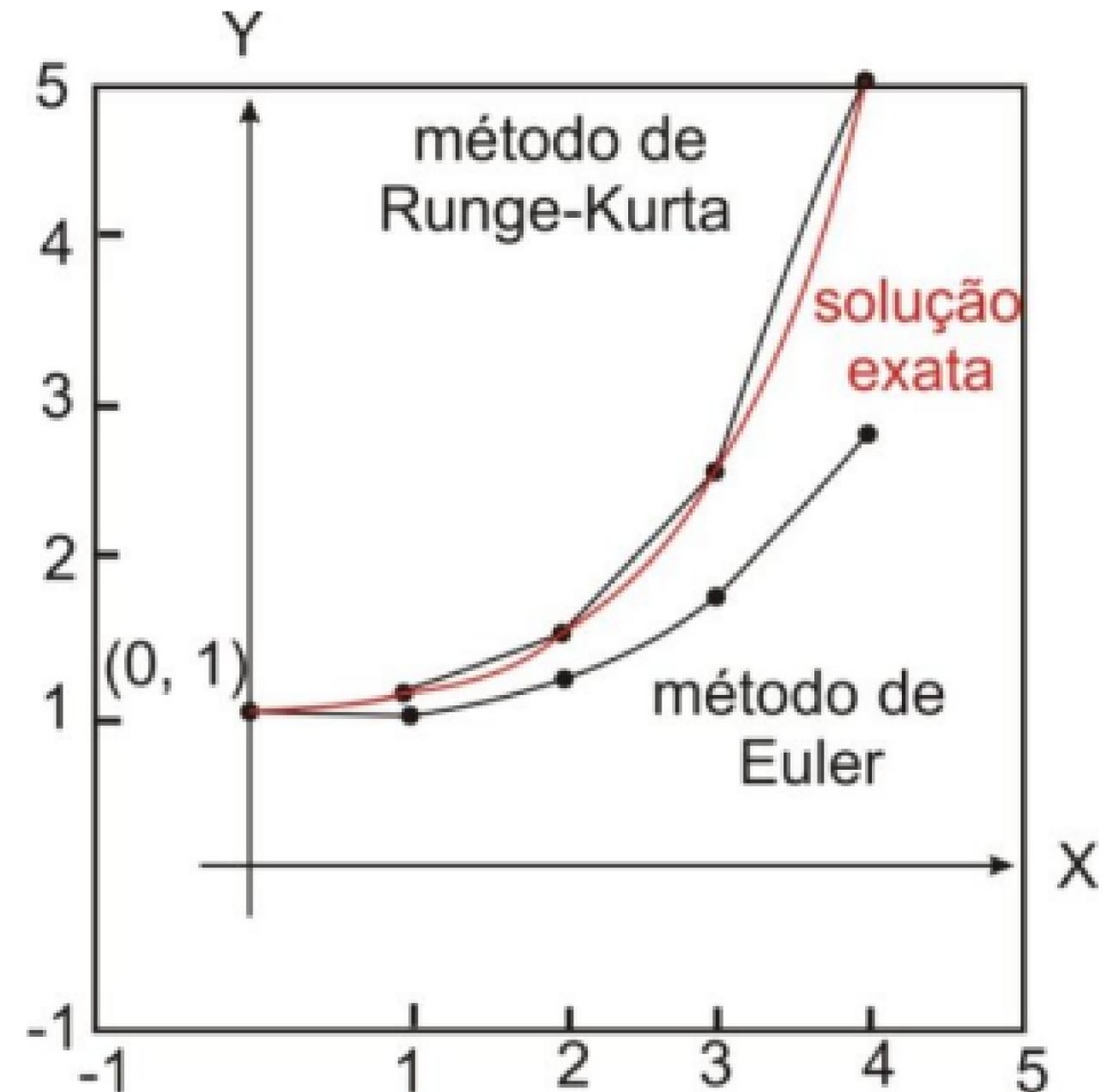
Martin Kutta

Martin Kutta (1867–1944), também matemático alemão, colaborou com Runge no desenvolvimento do método de Runge-Kutta. Nascido em Schlawe, Prússia (atualmente Polônia), Kutta refinou e generalizou os métodos propostos por Runge em 1901. Sua contribuição essencial foi a formulação de um esquema mais abrangente e a introdução de uma notação sistemática que facilitou a compreensão e a implementação do método. A colaboração entre Runge e Kutta resultou em uma abordagem numérica robusta e versátil, que se tornou uma ferramenta fundamental na resolução de EDOs e teve um impacto duradouro no campo da análise numérica.

Explicação do Método

Entre os métodos empregados na solução de problemas de valor inicial, os Métodos de Runge-Kutta destacam-se pela precisão e simplicidade.

Cada método de Runge-Kutta utiliza a comparação com um polinômio de Taylor apropriado para evitar o cálculo direto de derivadas.



Explicação do Método

Método geral de Runge-Kutta

$$y_{n+1} - y_n = h\phi(x_n, y_n, h) ,$$

$$\phi(x, y, h) = \sum_{r=1}^R c_r k_r ,$$

$$k_1 = f(x, y) ,$$

$$k_r = f\left(x + a_r h , y + h \sum_{s=1}^{r-1} b_{rs} k_s\right) ; r = 2, 3, \dots, R ,$$

$$a_r = \sum_{s=1}^{r-1} b_{rs} ; r = 2, 3, \dots, R .$$

As constantes c_r, a_r e b_{rs} são obtidas na comparação a expansão da função $\phi(x, y, h)$ com a função $\phi_T(x, y, h)$

Explicação do Método

Métodos de Runge-Kutta de ordem 2

$$\phi(x, y, h) = c_1 k_1 + c_2 k_2 ,$$

$$k_1 = f(x, y) ,$$

$$k_2 = f(x + a_2 h , y + h b_{21} k_1) ,$$

$$a_2 = b_{21} .$$

$$k_2 = f(x + a_2 h , y + h a_2 f) .$$

Desenvolvendo k_2 em série de Taylor em torno do ponto (x, y) , obtemos:

$$\begin{aligned} k_2 &= f(x, y) + (a_2 h) f_x(x, y) + (h a_2 f) f_y(x, y) + \frac{(a_2 h)^2}{2!} f_{xx}(x, y) \\ &\quad + (a_2 h)(h a_2 f) f_{xy}(x, y) + \frac{(h a_2 f)^2}{2!} f_{yy}(x, y) + O(h^3) . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi(x, y, h) &= c_1 k_1 + c_2 k_2 \\ &= c_1 f + c_2 \left[f + (a_2 h) f_x + (h a_2 f) f_y + \frac{(a_2 h)^2}{2!} f_{xx} \right. \\ &\quad \left. + (a_2 h)^2 f f_{xy} + \frac{(h a_2 f)^2}{2!} f_{yy} + O(h^3) \right] \\ &= (c_1 + c_2) f + c_2 a_2 h (f_x + f_y f) \\ &\quad + \frac{(a_2 h)^2}{2!} c_2 [f_{xx} + 2 f f_{xy} + f_{yy} f^2] + O(h^3) , \end{aligned}$$

Explicação do Método

Métodos de Runge-Kutta de ordem 2

$$\phi(x, y, h) = (c_1 + c_2)f + c_2 a_2 h F + \frac{(a_2 h)^2}{2!} c_2 G + O(h^3)$$

$$\phi_T(x, y, h) = f(x, y) + \frac{h}{2!} f'(x, y) + \frac{h^2}{3!} f''(x, y) + O(h^3)$$

$$= f + \frac{h}{2!} (f_x + f_y f) + \frac{h^2}{3!} (f_{xx} + 2f_{xy} f$$

$$+ f_{yy} f^2 + f_x f_y + f_y^2 f) + O(h^3)$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_2 a_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\phi_T(x, y, h) = f + \frac{h}{2} F + \frac{h^2}{3!} [G + f_y F] + O(h^3)$$

Explicação do Método

Métodos de Runge-Kutta de ordem 2

Método de Euler modificado

$c_1 = 0 \Rightarrow c_2 = 1$ e $a_2 = \frac{1}{2}$. Portanto:

$$y_{n+1} = y_n + hk_2, \text{ onde :}$$

$$k_1 = f(x_n, y_n),$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1)$$

Método de Euler melhorado

$c_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2}$ e $a_2 = 1$. Portanto:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2), \text{ onde :}$$

$$k_1 = f(x_n, y_n),$$

$$k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1),$$

Explicação do Método

Métodos de Runge-Kutta de ordem 3

$$y_{n+1} = y_n + h(c_1k_1 + c_2k_2 + c_3k_3) ,$$

$$\begin{aligned} k_3 &= f(x + ha_3, y + hb_{31}k_1 + b_{32}k_2) \\ &= f(x + ha_3, y + h(a_3 - b_{32})k_1 + b_{32}k_2) , \end{aligned}$$

Desde que $a_3 = b_{31} + b_{32}$.

- k_1 e k_2 possuem as mesmas expressões do método de ordem 2

Sistema de 4 equações e 6 incógnitas

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ c_2a_2 + c_3a_3 = \frac{1}{2} \\ c_3b_{32}a_2 = \frac{1}{6} \\ c_2a_2^2 + c_3a_3^2 = \frac{1}{3} \end{array} \right.$$

Explicação do Método

Métodos de Runge-Kutta de ordem 3

Método de Nystrom

$$c_2 = c_3 \text{ e } a_2 = a_3 .$$

$$\begin{cases} 2c_3a_3 = \frac{1}{2} \Rightarrow c_3a_3 = \frac{1}{4} \\ 2c_3a_3^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow c_3a_3^2 = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$a_3 = \frac{2}{3} = a_2$$

$$c_3 = \frac{3}{8} = c_2 .$$

$$c_1 = \frac{1}{4}$$

$$b_{32} = \frac{2}{3}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4} \left[k_1 + \frac{3}{2}(k_2 + k_3) \right] , \text{ onde :}$$

$$k_1 = f(x_n, y_n) ,$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hk_1\right) ,$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hk_2\right) ,$$

Explicação do Método

Métodos de Runge-Kutta de ordem 4

Os dois métodos de Runge-Kutta de ordem 4 mais utilizados

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{6} [k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4] , \text{ onde :}$$

$$k_1 = f(x_n, y_n) ,$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1) ,$$

$$k_3 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2) ,$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3) ,$$

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{8} [k_1 + 3(k_2 + k_3) + k_4] , \text{ onde :}$$

$$k_1 = f(x_n, y_n) ,$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{1}{3}h, y_n + \frac{1}{3}hk_1) ,$$

$$k_3 = f(x_n + \frac{2}{3}h, y_n - \frac{1}{3}hk_1 + hk_2) ,$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_1 - hk_2 + hk_3) ,$$

Exemplificação do Método

Exemplo: Para a equação diferencial $y' = -x + y + 2$ e condição inicial $y(0) = 2$, determine $y(0,2)$. Considere $h = 0,1$ e faça arredondamento com 4 casas decimais

$$f(x,y) = -x + y + 2$$

$$x_0 = 0$$

$$y_0 = 2$$

$$h = 0,1 \text{ (espaçamento, ou passos)}$$

Exercício para Casa: resolver a EDO do enunciado pelo método de Runge-Kutta de ordem 2 (utilizando apenas K_1 e K_2), comparando com o resultado analítico e gráfico.

n	x_n	y_n	y_{n+1}
0	0	2	
1			
2			

Exemplificação do Método

Exemplo: Para a equação diferencial $y' = -x + y + 2$ e condição inicial $y(0) = 2$, determine $y(0,2)$. Considere $h = 0,1$ e faça arredondamento com 4 casas decimais

$$f(x,y) = -x + y + 2$$

$$x_0 = 0$$

$$y_0 = 2$$

$$h = 0,1 \text{ (espaçamento, ou passos)}$$

- Primeiro passo: $n = 0$

$$n = 0$$

$$x_n = 0$$

$$y_n = 2$$

$$K_1 = f(0,2) = -0 + 2 + 2 = 4$$

$$K_2 = f(0,05, 2,2) = 4,15$$

$$K_3 = f(0,05, 2,2075) = 4,1575$$

$$K_4 = f(0,1, 2,4157) = 4,3157$$

$$k_1 = f(x_n, y_n) ,$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1) ,$$

$$k_3 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2) ,$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3) ,$$

n	x_n	y_n	y_{n+1}
0	0	2	
1			
2			

Exemplificação do Método

Exemplo: Para a equação diferencial $y' = -x + y + 2$ e condição inicial $y(0) = 2$, determine $y(0,2)$. Considere $h = 0,1$ e faça arredondamento com 4 casas decimais

$$f(x,y) = -x + y + 2$$

$$x_0 = 0$$

$$y_0 = 2$$

$$h = 0,1 \text{ (espaçamento, ou passos)}$$

- Primeiro passo: $n = 0$

$$n = 0$$

$$x_n = 0$$

$$y_n = 2$$

$$K_1 = f(0,2) = -0 + 2 + 2 = 4$$

$$K_2 = f(0,05, 2,2) = 4,15$$

$$K_3 = f(0,05, 2,2075) = 4,1575$$

$$K_4 = f(0,1, 2,4157) = 4,3157$$

$$\longrightarrow y_{n+1} = 2 + \frac{0,1}{6} \times (4 + 2 \times 4,15 + 2 \times 4,1575 + 4,3157) = 2,4155$$

n	x_n	y_n	y_{n+1}
0	0	2	2,4155
1			
2			

Exemplificação do Método

Exemplo: Para a equação diferencial $y' = -x + y + 2$ e condição inicial $y(0) = 2$, determine $y(0,2)$. Considere $h = 0,1$ e faça arredondamento com 4 casas decimais

$$f(x,y) = -x + y + 2$$

$$x_0 = 0$$

$$y_0 = 2$$

$$h = 0,1 \text{ (espaçamento, ou passos)}$$

- Segundo passo: $n = 1$

$$n = 1$$

$$x_n = 0,1$$

$$y_n = 2,4155$$

$$K_1 = 4,3155$$

$$K_2 = 4,4813$$

$$K_3 = 4,4896$$

$$K_4 = 4,6645$$

$$k_1 = f(x_n, y_n) ,$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1) ,$$

$$k_3 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2) ,$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3) ,$$

n	x_n	y_n	y_{n+1}
0	0	2	2,4155
1	0,1	2,4155	
2			

Exemplificação do Método

Exemplo: Para a equação diferencial $y' = -x + y + 2$ e condição inicial $y(0) = 2$, determine $y(0,2)$. Considere $h = 0,1$ e faça arredondamento com 4 casas decimais

$$f(x,y) = -x + y + 2$$

$$x_0 = 0$$

$$y_0 = 2$$

$$h = 0,1 \text{ (espaçamento, ou passos)}$$

• Segundo passo: $n = 1 \longrightarrow y_{n+1} = 2,4155 + \frac{0,1}{6} \times (4,3155 + 2 \times 4,4813 + 2 \times 4,4813 + 4,6645) = 2,4155$

$$x_n = 0,1$$

$$y_n = 2,4155$$

$$K_1 = 4,3155$$

$$K_2 = 4,4813$$

$$K_3 = 4,4896$$

$$K_4 = 4,6645$$

n	x_n	y_n	y_{n+1}
0	0	2	2,4155
1	0,1	2,4155	2,8642
2	0,2	2,8642	

Exemplificação do Método

Exercício: Usando: $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \times [k_1 + k_2], n = 1, 2, 3$

Resolver:
$$\begin{cases} y' = -y + x + 2 \\ y(0) = 2, x \in [0, 0, 3], h = 0, 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} K_1 &= f(x_n, y_n), \\ K_2 &= f(x_n + h, y_n + h \times K_1) \end{aligned}$$

Exercício para Casa: resolver a EDO do enunciado pelo método de Runge-Kutta de ordem 4 (utilizando de K1 a K4), comparando com o resultado analítico.

Exemplificação do Método

Exercício. Usando: $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \times [k_1 + k_2], n = 1, 2, 3$

Solução:

- Passo 1: $f(x, y) = -y + x + 2, h = 0,1, x_0 = 0, y_0 = 2$ onde, $x_1 = 0,1, x_2 = 0,2, x_3 = 0,3$

- Passo 2: $n = 0$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2} \times [K_1 + K_2]$$

$$K_1 = f(x_0, y_0) = f(0, 2) = -2 + 0 + 2 = 0,000000$$

$$K_2 = f(x_0 + h, y_0 + h \times K_1) = f(0,1; 2) = -2 + 0,1 + 2 = 0,100000$$

$$y_1 = 2 + \frac{0,1}{2} \times [0,000000 + 0,100000] = 2,005000$$

Exemplificação do Método

Exercício. Usando: $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \times [k_1 + k_2], n = 1, 2, 3$

Solução:

- Passo 3: $n = 1$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2} \times [K_1 + K_2]$$

$$K_1 = f(x_1, y_1) = f(0, 1; 2, 005000) = -2,005000 + 0,1 + 2 = 0,095000$$

$$K_2 = f(x_1 + h, y_1 + h \times K_1) = f(0, 2; 2, 014500) = -2,014500 + 0,2 + 2 = 0,185500$$

$$y_2 = 2,005000 + \frac{0,1}{2} \times [0,095000 + 0,185500] = 2,019025$$

Exemplificação do Método

Exercício. Usando: $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \times [k_1 + k_2], n = 1, 2, 3$

Solução:

- Passo 4: $n = 2$

$$y_3 = y_2 + \frac{h}{2} \times [K_1 + K_2]$$

$$K_1 = f(x_2, y_2) = f(0, 2; 2, 019025) = -2, 019025 + 0, 2 + 2 = 0, 180975$$

$$K_2 = f(x_2 + h, y_2 + h \times K_1) = f(0, 3; 2, 037123) = -2, 037123 + 0, 3 + 2 = 0, 262877$$

$$y_3 = 2, 019025 + \frac{0, 1}{2} \times [0, 180975 + 0, 2628770] = 2, 041218$$

Exemplificação do Método

Exercício. Usando: $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \times [k_1 + k_2], n = 1, 2, 3$

Solução:

K	Xk	Yk	Y(Xk)
0	0,000000	2,000000	2,000000
1	0,100000	2,005000	2,004837
2	0,200000	2,019025	2,018731
3	0,300000	2,041218	2,040818

Método Runge-Kutta vs Método de Euler

Precisão

O método de Euler é um método de primeira ordem, o que significa que a precisão da solução é proporcional ao tamanho do passo utilizado. Quanto menor o passo, mais precisa será a solução, mas isso implica em mais cálculos. O método de Runge-Kutta, por outro lado, pode ser implementado em diferentes ordens, como RK2, RK3, RK4, etc. O RK4 é especialmente usado, por ser um método de quarta ordem - o que proporciona uma precisão muito maior em comparação com o método de Euler.

Complexidade Computacional

O método de Euler é relativamente simples de implementar, exigindo apenas uma única avaliação da derivada por iteração. O método de Runge-Kutta, especialmente em suas versões de ordem superior, envolve mais cálculos por iteração, tornando-o mais complexo computacionalmente. No entanto, isso é muitas vezes compensado pela maior precisão, permitindo que o método de Runge-Kutta use passos maiores sem sacrificar a precisão.

Estabilidade

Em alguns casos, o método de Euler pode apresentar instabilidade numérica, especialmente em sistemas de equações diferenciais que envolvem fenômenos oscilatórios ou não-lineares fortes. O método de Runge-Kutta, devido à sua precisão superior, tende a ser mais estável em uma variedade mais ampla de situações.

Aplicação Computacional

Código em Python que resolve uma equação diferencial ordinária de primeira ordem (EDO) utilizando o Método Runge-Kutta de quarta ordem (RK4).

Dentro do *loop*, calcula quatro coeficientes 'k1', 'k2', 'k3' e 'k4' usando o método de Runge-Kutta. Esses coeficientes são baseados em avaliações da função diferencial 'f' em diferentes pontos ao longo do intervalo de tempo.

Usamos esses coeficientes para atualizar o valor da solução 'y' usando a fórmula do método de Runge-Kutta. Também atualizamos o tempo 't'. Os novos valores (t, y) são adicionados à lista 'resultado'.

```
def runge_kutta(f, y0, t0, tn, h):
    resultado = [(t0, y0)]
    t = t0
    y = y0
    while t < tn:
        k1 = h * f(t, y)
        k2 = h * f(t + h/2, y + k1/2)
        k3 = h * f(t + h/2, y + k2/2)
        k4 = h * f(t + h, y + k3)
        y = y + (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6
        t = t + h
        resultado.append((t, y))
    return resultado

def exemplo_edo(t, y):
    return y - t**2 + 1

t0 = 0 # Tempo inicial
tn = 2 # Tempo final
y0 = 0.5 # Condição inicial
h = 0.2 # Tamanho do passo

solucao = runge_kutta(exemplo_edo, y0, t0, tn, h)
for t, y in solucao:
    print(f"t = {t:.2f}, y = {y:.6f}")
```

Parâmetros:

- f: Função que representa a EDO ($dy/dt = f(t, y)$)
- y0: Condição inicial
- t0: Tempo inicial
- tn: Tempo final
- h: Tamanho do passo

A lista 'resultado' armazena os pontos da solução, começando com a condição inicial '(t0, y0)'. Em seguida, usa-se um *loop* 'while' que continua até que o tempo 't' alcance o tempo final 'tn'.

O exemplo de uso define uma função 'exemplo_edo' que representa a EDO: $\frac{dy}{dt} = y - t^2 + 1$

Em seguida, são definidos os parâmetros iniciais.

A função 'runge_kutta' é chamada para resolver a EDO. A solução é então impressa para cada ponto calculado.

Aplicações na Engenharia



Engenharia Civil

- **Análise de Estruturas**
 - Na análise dinâmica de estruturas, como pontes, edifícios e túneis, os métodos de Runge-Kutta podem ser usados.
- **Dinâmica de Solos**
 - Em estudos de interação solo-estrutura e análise de assentamento de fundações
- **Modelagem Hidráulica**
 - Em simulações de escoamento de água em canais, rios e redes de distribuição, os métodos de Runge-Kutta podem ser úteis para resolver equações diferenciais que representam os fenômenos hidráulicos, como transientes em sistemas de tubulação



Engenharia Química

- **Dinâmica de Fluidos**
 - Modelagem da dinâmica de fluidos em reatores químicos, ajudando a entender e otimizar a distribuição de temperatura
- **Processo de Separação**
 - Podem ser empregados para simular o comportamento dinâmico e otimizar as condições operacionais para obter os produtos desejados



Engenharia Elétrica

- **Circuitos Elétricos**
 - Podem ser usados para simular a resposta transitória do sistema a diferentes condições iniciais ou entradas
- **Comunicações**
 - Modelar a propagação de sinais em meios de transmissão e simular a resposta dinâmica de sistemas de comunicação
- **Redes Elétricas**
 - Simular transientes e eventos transitórios, fornecendo insights sobre o comportamento dinâmico da rede



Engenharia Aeroespacial

- **Dinâmica de Voo**
 - Resolver as equações diferenciais que descrevem a dinâmica de voo de aeronaves e espaçonaves
- **Aeroelasticidade**
 - Modelar as interações entre as forças aerodinâmicas, as deformações estruturais e os movimentos do veículo

Aplicações na Engenharia

Pesquisas Acadêmicas

1

Método de Runge-Kutta Aplicado à Deflexão de Viga - UNIJUI 2017

O método numérico, especificamente o de Runge-Kutta, apresentou um erro percentual muito baixo (0,0669%), indicando alta precisão em comparação com o método analítico (0,0668%). O estudo sugere que, mesmo em casos mais complexos, como vigas com geometria não uniforme, o método numérico pode fornecer resultados precisos a um custo reduzido em comparação com softwares de simulação.

2

Método RK Aplicado em Sistemas Mecânicos em Fase - IFPE 2021

Este trabalho destaca a significativa aplicação dos métodos computacionais na resolução de equações diferenciais que descrevem sistemas mecânicos, utilizando o software Wolfram Mathematica® 11. A abordagem se concentra na mecânica hamiltoniana no espaço de fase e utiliza o método numérico de Runge-Kutta para resolver numericamente sistemas como o pêndulo simples e osciladores harmônicos unidimensional, bidimensional e anarmônico. Os resultados numéricos são comparados com soluções analíticas, evidenciando a eficácia do método. Além das implicações físicas, ressalta-se a amplitude dos métodos numéricos, destacando sua importância na engenharia e em aplicações simulativas no cotidiano

3

Implementação Numérica de Problemas de Viscoelasticidade - 2013

Neste trabalho, foi apresentada uma teoria unificada que assegura uma ordem de convergência nominal $p \geq 2$ para métodos de Runge-Kutta (RK) utilizados como integradores temporais em modelos viscoelásticos analisados pelo método dos elementos finitos. A validade desse conceito foi demonstrada em um modelo viscoelástico de grandes deformações de Hartmann, com foco especial nos métodos RK diagonalmente implícitos (DIRK). O ponto central desta pesquisa destaca que, para garantir a ordem de convergência nominal do método de integração, a aproximação da deformação ao longo do tempo deve ser consistente com a ordem de convergência do integrador temporal.

Tarefa para Casa

Dado o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = \frac{x^2+2y}{x} \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

Determine uma aproximação para $y(1.3)$, com $h = 0.3$ usando o método de Runge-Kutta de 4ª ordem.

Referências Bibliográficas

Blog de Engenharia Química, Santos SP. **Métodos de Euler e Runge-Kutta: Exemplo de Aplicação.** Disponível em: <https://www.engquimicasantosp.com.br/2016/03/metodos-de-euler-e-runge-kutta.html>.

Departamento de Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina. **Métodos de Euler e Runge-Kutta.** Disponível em: <http://www.mtm.ufsc.br/~fermin/runge>.

E-Disciplinas - MAP3121 (2022). **Notas de Aula: Métodos Numéricos para Equações Diferenciais Ordinárias.** Disponível em: <https://edisciplinas.usp.br/course/view.php?id=97397>.

Stumpf, Felipe Tempel. **Implementação numérica de problemas de viscoelasticidade finita utilizando métodos de Runge-Kutta de altas ordens e interpolação consistente entre as discretizações temporal e espacial.** Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/75757>.

De Lima, Claudia Claudiane. **Aplicação do Método de Runge-Kutta em Sistemas Mecânicos no Espaço de Fase.** Disponível em: <https://releia.ifsertao-pe.edu.br/jspui>.

Dambroz, Giovani Prates. **Método de Runge-Kutta Aplicado à Deflexão de Viga.** Disponível em: [file:///C:/Users/Thiago/Downloads/8213-Texto%20do%20artigo-35043-1-10-20170921%20\(2\).pdf](file:///C:/Users/Thiago/Downloads/8213-Texto%20do%20artigo-35043-1-10-20170921%20(2).pdf).