Atividade 1

Matrizes elementares

Def: Uma matriz elementar $n \times n$ é uma matriz obtida da matriz identidade $I \in M_n(\mathbb{K})$ aplicando-se uma, e somente uma, operação elementar.

- Denotamos por E_{ij} a matriz elementar trocando-se a linha i com a linha j de $I \in M_n(\mathbb{K})$.

- $E_i(\alpha)$ denota a matriz elementar obtida multiplicando-se a linha i da matriz identidade pelo escalar $\alpha \neq 0$.

- $E_{ij}(\alpha)$ é a matriz elementar obtida de I somando-se à linha j, α vezes a linha i.

Exercícios.

1) Represente as matrizes elementares E_{ij}, $E_i(\alpha)$ e $E_{ij}(\alpha)$ e dê exemplos em $M_2(\mathbb{R})$ e $M_3(\mathbb{C})$.

2) Sejam E uma matriz elementar $n \times n$ e $A \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$. Mostre que EA é igual a matriz obtida aplicando-se à matriz a mesma operação elementar que originou E.

3) Mostre que toda matriz elementar E é invertível. Além disso, mostre que E^{-1} também é uma matriz elementar.

4) Seja $R \in M_n(\mathbb{K})$ na forma escalonada reduzida. Se $R \neq I$, então R possui uma linha nula.

5) Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes.

(a) Existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ tal que $BA = I$.

(b) A matriz A é equivalente por linhas à matriz identidade.

(c) A matriz A é invertível.

6) Sejam $A \in M_n(\mathbb{K})$ e $B \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$. Mostre que:

(a) O sistema associado $AX = B$ tem solução única se, só se, A é invertível. Neste caso $X = A^{-1}B$.

(b) O sistema homogêneo $AX = \bar{0}$ tem solução não trivial se só se A não é invertível.

7) Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Mostre que se AB é invertível, então A e B também são matrizes invertíveis.

8) Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$ e suponha que $A^k = 0$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Mostre que

$$(I-A)^{-1} = I + A + \dots + A^{k-1}.$$

9) Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Suponha que $A+B$ e A são invertíveis. Mostre que

$$(A+B)^{-1} = A^{-1}(I + BA^{-1})^{-1}.$$

10) Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$ escrita em termos de suas linhas denotadas por A_i. Se para algum $k \in \{1, \dots, n\}$ a linha $A_k = \alpha X + \beta Y$ com $X = (x_1 \dots x_n)$ e $Y = (y_1 \dots y_n)$ em $\mathbb{K}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, então

$$\det A = \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ \alpha X + \beta Y \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \alpha \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ X \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + \beta \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ Y \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}.$$

OBS: O exercício 10 acima mostra que a função determinante $\det : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ é multilinear.

Além disso, dele podemos provar que:

(a) Se $A \in M_n(\mathbb{K})$ possui uma linha nula, então $\det A = 0$.

(b) Se $A \in M_n(\mathbb{K})$ é obtida de $B \in M_n(\mathbb{K})$ pela troca da posição de duas linhas, então $\det A = -\det B$.

(c) Se $A \in M_n(\mathbb{K})$ é obtida de $B \in M_n(\mathbb{K})$ pela troca de uma linha por ela somada a um múltiplo de outra linha, então $\det A = \det B$.

11) Seja $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$. Aqui denotamos por A_{ij} a matriz obtida de A retirando-se a i-ésima linha e j-ésima coluna. Prove que:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \quad \left(j \text{ fixo qualquer em } \{1, \dots, n\} \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+i} a_{ij} \det A_{ij} \quad \left(i \text{ fixo qualquer em } \{1, \dots, n\} \right)$$

12) Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Então:

(a) $\det(AB) = \det A \det B$

(b) $\det A^t = \det A$.

Referência: 1) Hoffman e Kunze. Álgebra linear.

2) Reginaldo dos Santos. Um curso de geometria analítica e álgebra linear.