Aula 17

Continuidade

Vamos estudar funções $f : A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$.

Tais funções determinam m funções componentes $f_i : A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ de forma que $f(x) \in \mathbb{R}^m$ satisfaz $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$.

Função Projeção. Se $\pi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ é a função identidade $\pi(x) = (\pi_1(x), \dots, \pi_n(x)) = x$

$\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}^n \longrightarrow x_i \in \mathbb{R}$ é chamada i-ésima projeção $i = 1, \dots, n$.

Limite. $\lim_{x \to x_0} f(x) = b \in \mathbb{R}^m$ se dado $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que $|f(x) - b| < \varepsilon$ sempre que $|x - x_0| < \delta$ e $x \in$ Domínio de $f = A$.

Continuidade. f é contínua em $x_0 \in A$ se
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$
Se f é contínua em todos os pontos de seu domínio, dizemos que é uma função contínua.

Teo. $f: A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ é contínua se só se $\forall\, U \subset \mathbb{R}^m$ aberto, existe $V \subset \mathbb{R}^n$ aberto tal que
$$f^{-1}(U) = V \cap A.$$

dem. Suponha f contínua e $a \in f^{-1}(U)$. $f(a) \in U$ aberto, logo existe R retângulo tal que $f(a) \in R \subset U$. Como f é contínua, $\exists$ Retangulo $R_a \subset A$ tal que $a \in R_a$ e $f(x) \in R$ $\forall\, x \in R_a$. Considere $V = \bigcup_{a \in f^{-1}(U)} R_a$.

Então $f^{-1}(U) = V \cap A$. A volta segue da definição. ∎

Teo. Seja $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ contínua e A compacto. Então $f(A)$ também é compacto.

dem. Seja $\mathcal{C}$ cobertura de $f(A)$. Considere $\mathcal{C}' = \{ f^{-1}(C) : C \in \mathcal{C} \}$. $\mathcal{C}'$ é cobertura de A compacto. Logo possui subcobertura finita de A $\mathcal{C}'' = \{ f^{-1}(C_1), \dots, f^{-1}(C_p) \}$ para algum $p \in \mathbb{N}$. Então $\mathcal{C}''' = \{ C_1, \dots, C_p \}$ é cobertura finita de $f(A)$

$\leadsto$ $f(A)$ é compacto. $\blacksquare$

Corolário: Seja $f: A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ contínua com A compacto. Então existem a e $b \in A$ tais que $f(a) = \max_{x \in A} f(x)$ e $f(b) = \min_{x \in A} f(x)$.

dem. Do teorema anterior temos que $f(A) \subset \mathbb{R}$ é compacto, logo, pelo exercício 4 da aula 16 é fechado e limitado. Logo existem

$$\alpha = \sup_{x\in A} f(x) \quad e \quad \inf_{x\in A} f(x) = \beta.$$

Vamos verificar que existe $a \in A$ t.q. $f(a) = \alpha$. Para isso, seja $(a_n) \subset A$ sequência tal que $f(a_n) \to \alpha$.

$(f(a_n))$ é uma sequência convergente de $f(A)$.

Como $f(A)$ é fechado, $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) \in f(A)$ e

$\exists\, a \in A$ tal que $f(a) = \alpha$. Analogamente

se mostra $\exists\, b \in A$ t.q. $f(b) = \beta$. ∎