Física 1 – Ciências Moleculares

Caetano R. Miranda

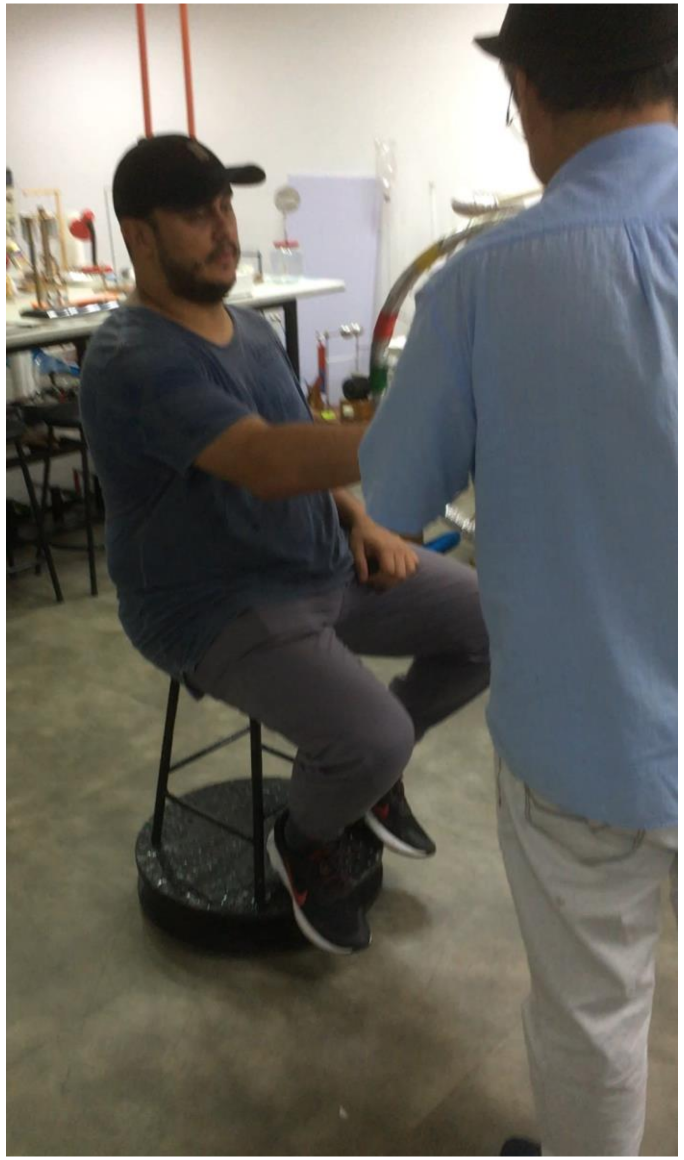
AULA 28 – 13/12/2023

crmiranda@usp.br

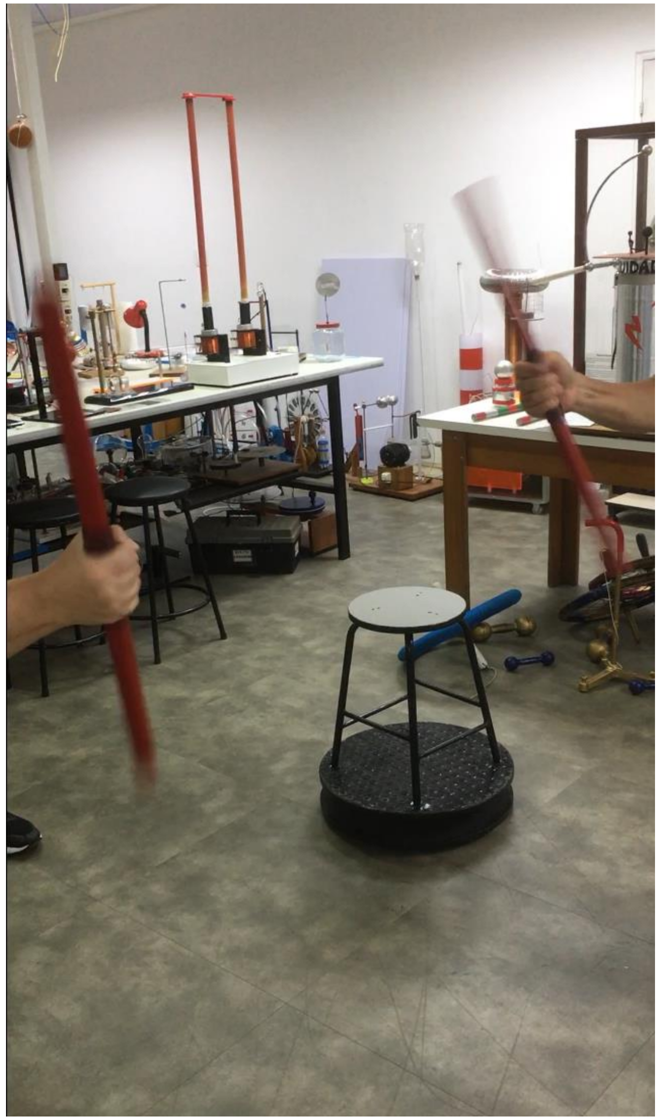
Rotações
Dinâmica de corpos rígidos

Demonstrações

Demonstração

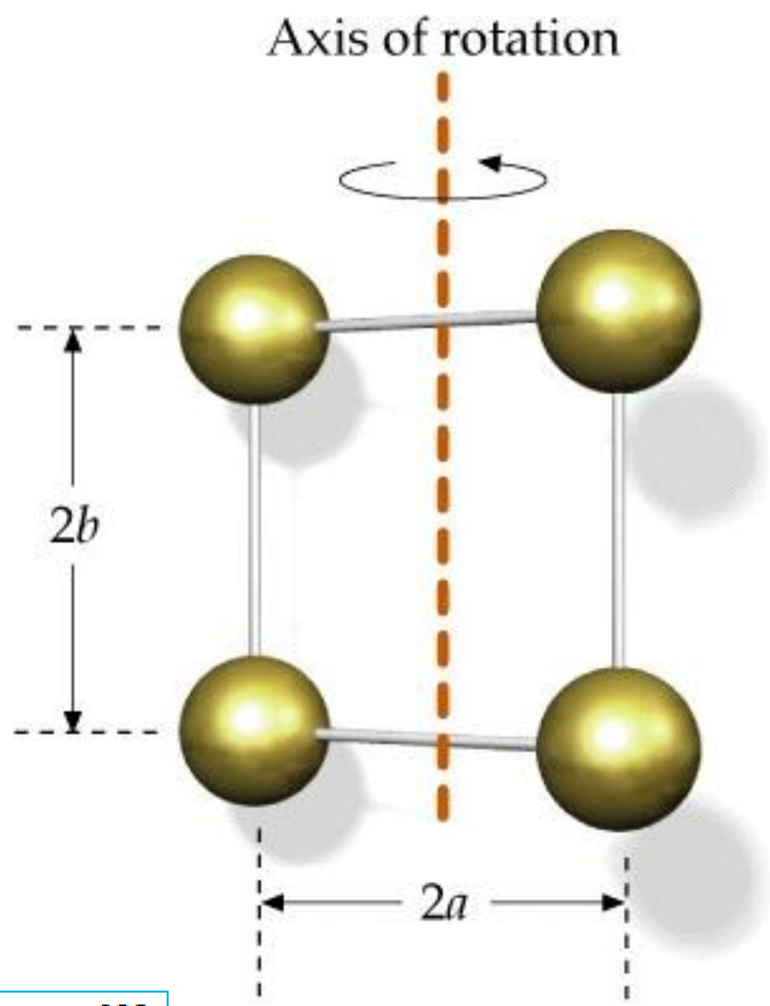


Demosntrações



Momento de Inércia

- Sistemas discretos: $I = \sum_i \left(m_i r_i^2\right)$



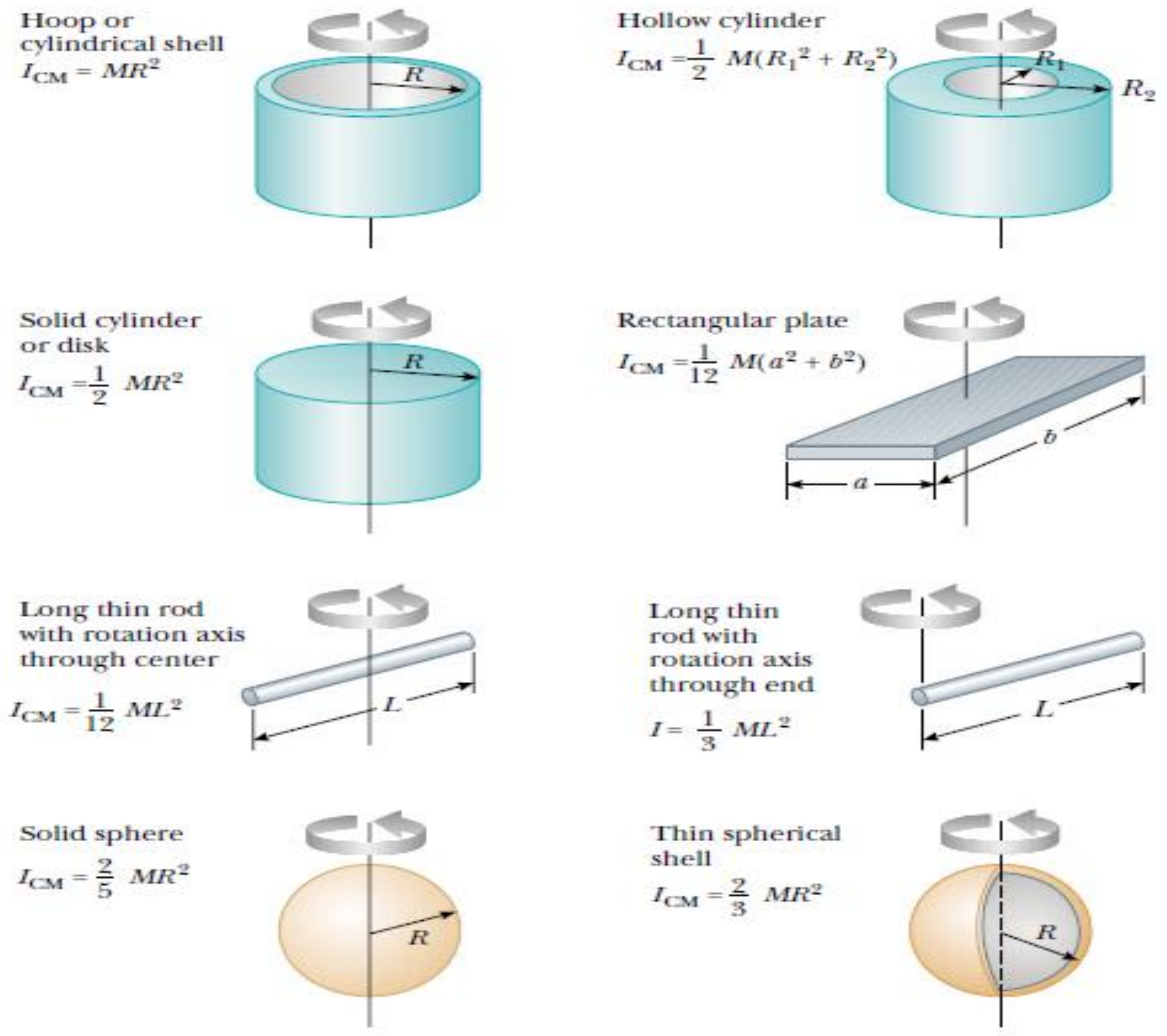
Subdividindo o corpo em pequenas porções, no limite quando a massa de cada porção vai a zero:

- Corpos contínuos: $I = \int r^2 dm$

r = distância de cada parcela dm do corpo ao eixo

$\lambda = \dfrac{m}{L}$ $\quad \sigma = \dfrac{m}{A}$ $\quad \rho = \dfrac{m}{V}$

Alguns Momentos de Inércia

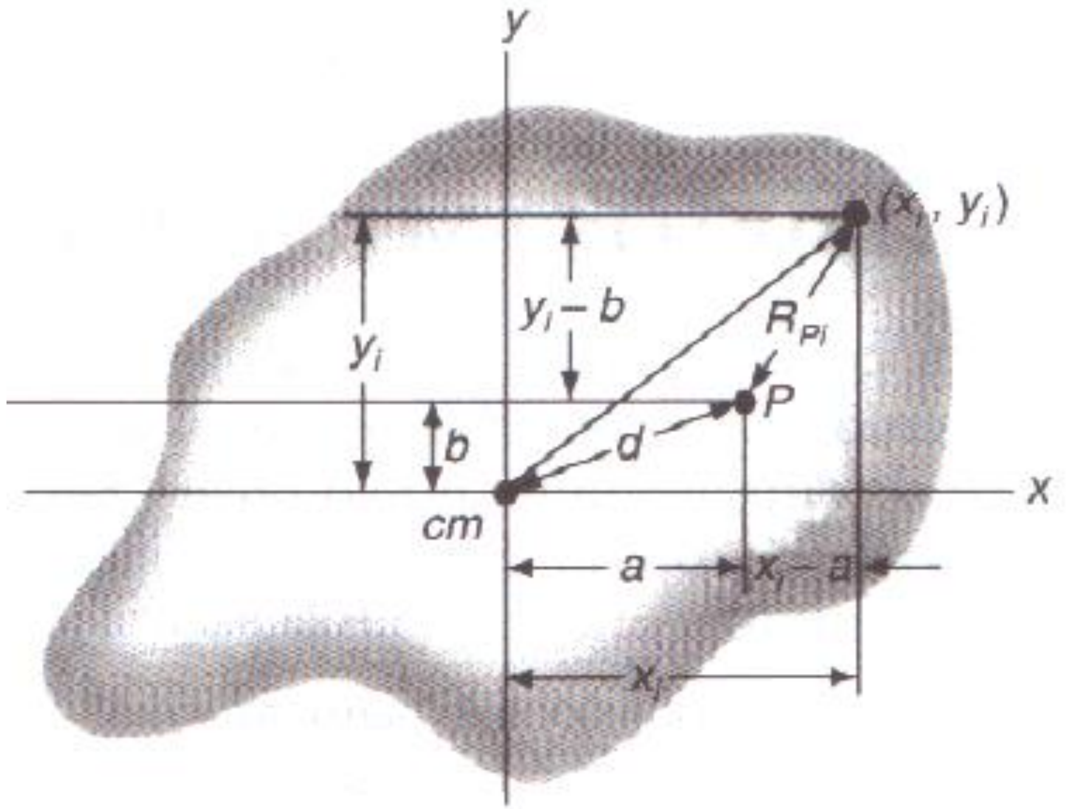


Teorema dos Eixos Paralelos

“O momento de inércia de um corpo em relação a um eixo qualquer é igual ao momento de inércia em relação ao eixo paralelo, que passa pelo centro de massa, somado ao produto da massa do corpo pela distância entre os eixos ao quadrado”.

- ❑ Momento de Inércia de um objeto de forma arbitrária em relação a um eixo que passa pelo ponto P.
- ❑ eixo z: passa pelo CM / paralelo ao eixo rotacional por P.

$$x_{cm} = 0$$
$$y_{cm} = 0.$$



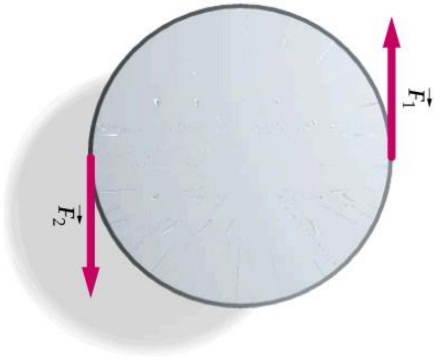
- ❑ Distância entre os eixos paralelos: $d = \sqrt{a^2 + b^2}$

Segunda Lei de Newton para a Rotação

- Definição de Newton para a sua segunda lei:

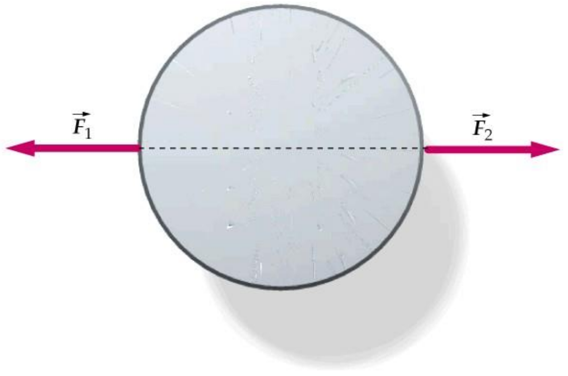
$$\vec{F}_{res} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

Translação



2a Lei de Newton: resultante das forças externas provoca a aceleração do centro de massa de sistemas.

Quando a linha de ação das forças externas não passa pelo centro de massa: rotação do sistema!



Força e torque

- Partícula de massa **m**, presa a uma barra de comprimento **r**.
- Força **F** aplicada à partícula.
- Componente tangencial da força:

$$F_t = ma_t$$

$$\boxed{F_t = F sen\varphi}$$

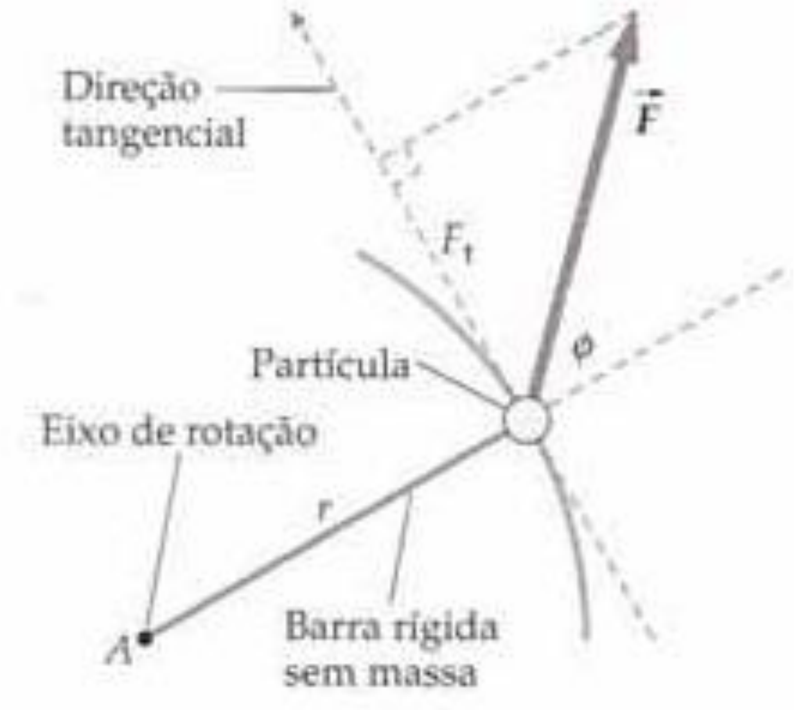
$$\boxed{a_t = r\alpha}$$

$$rF_t = mr^2\alpha$$

$$\tau = mr^2\alpha$$

$$\boxed{\tau = I\alpha}$$

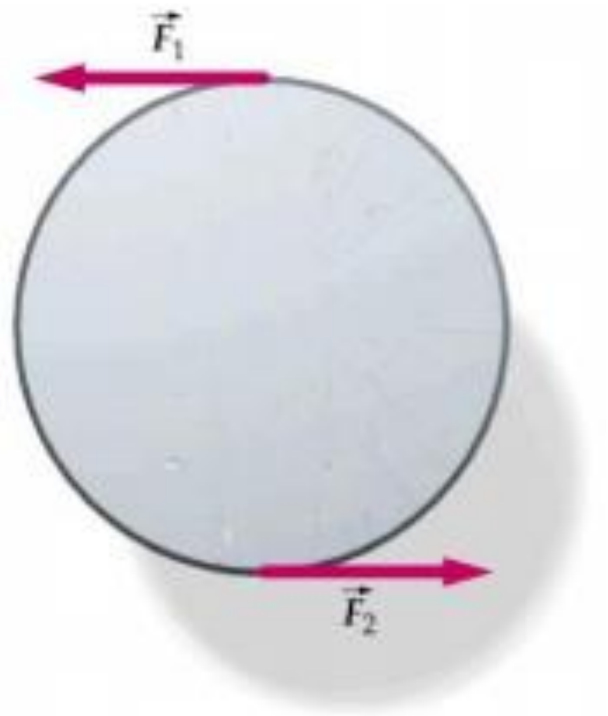
Torque em relação ao eixo de rotação A



"Força aplicada sobre um objeto fazendo ele girar em torno de um eixo"

Segunda lei de Newton para a rotação

Um corpo rígido que gira em torno de um eixo fixo é uma coleção de partículas, com as mesmas velocidade e aceleração angulares.



$$\tau_i = m_i r_i^2 \alpha$$

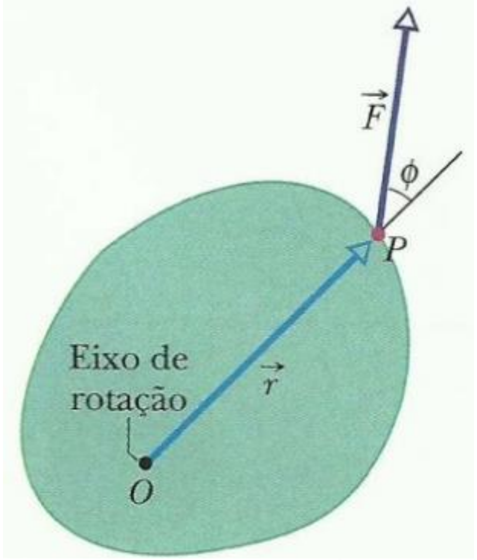
Somando sobre todas as partículas do corpo:

$$\tau = \sum \tau_i = \sum m_i r_i^2 \alpha = \left(\sum m_i r_i^2\right)\alpha = I\alpha$$

$$\boxed{\tau_{ext_{res}} = I\alpha}$$

Segunda Lei de Newton para a rotação

❑ Rotações: são importantes as componentes tangenciais da força



$$\tau = F_t r$$

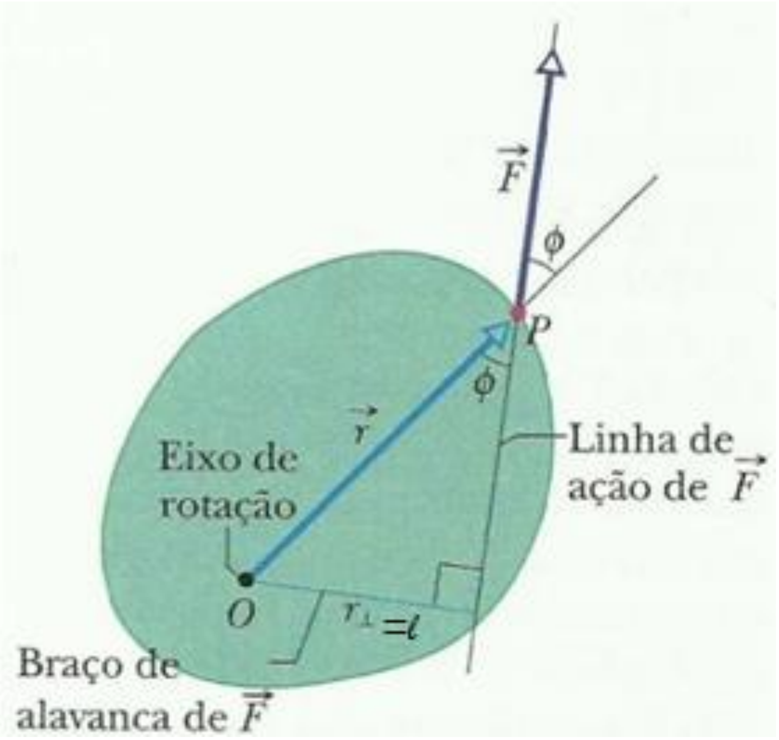
$$\tau = F \sin\phi \cdot r$$

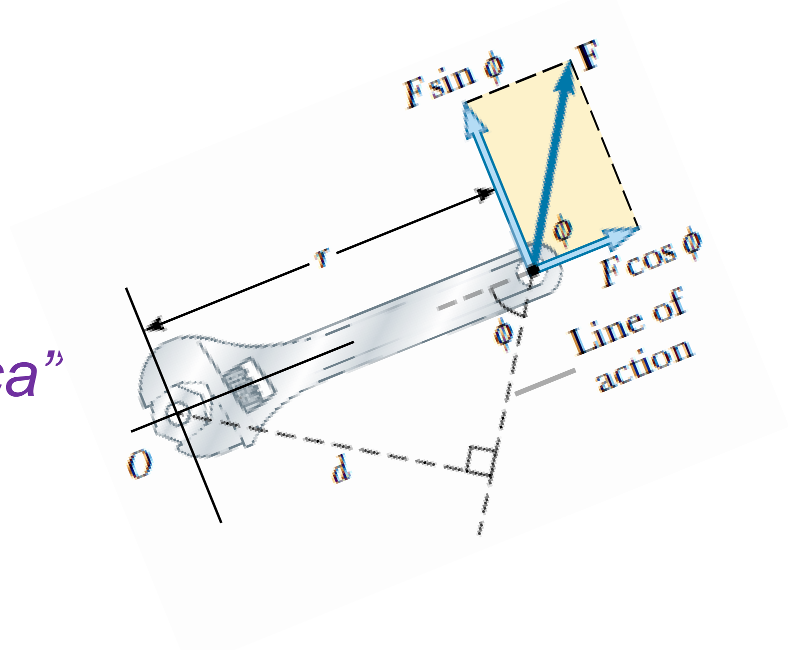
ou $$\tau = Fr \sin\phi$$

$$\tau = Fl$$

$$\ell$$

ℓ = "braço de alavanca"

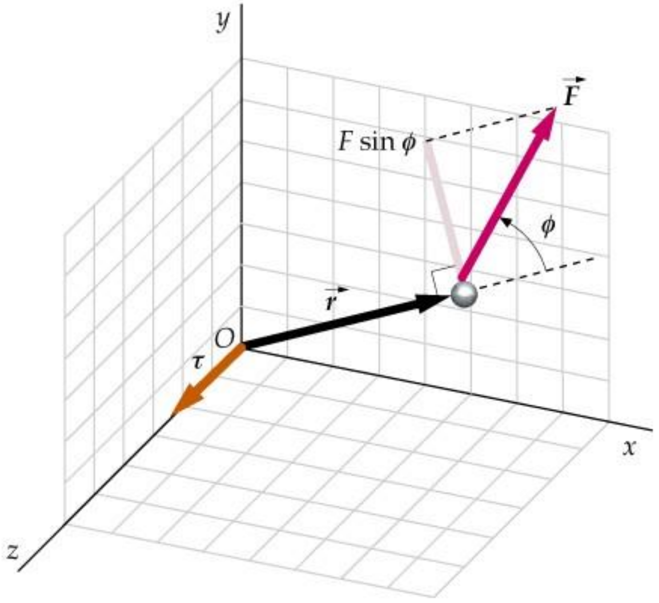


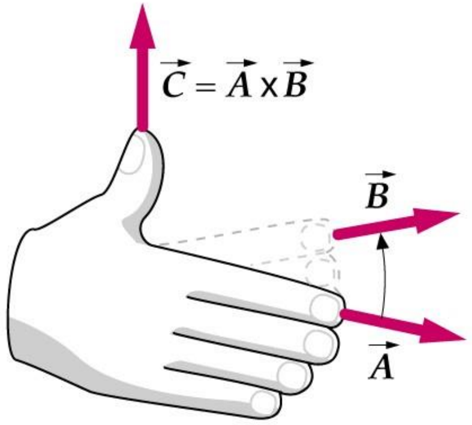


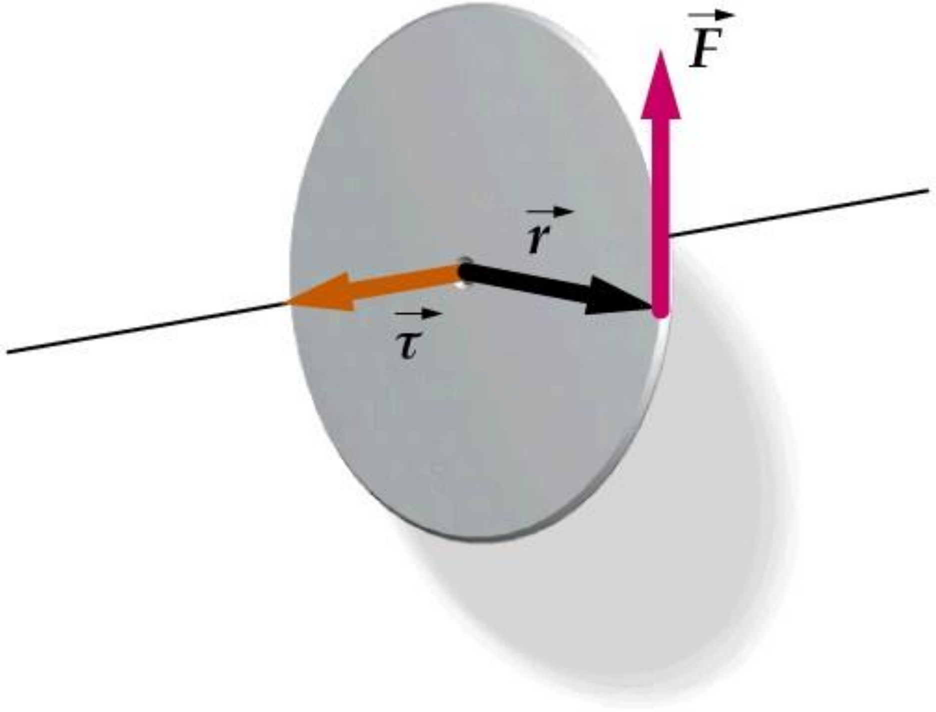
Torque positivo – sentido anti-horário
(aumento do ângulo)

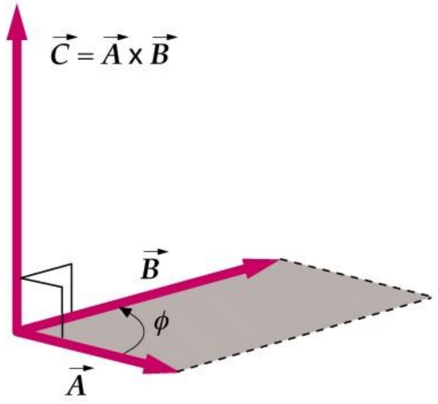
Natureza Vetorial do Torque

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \xrightarrow{\text{módulo}} \tau = rF \sin\phi$$





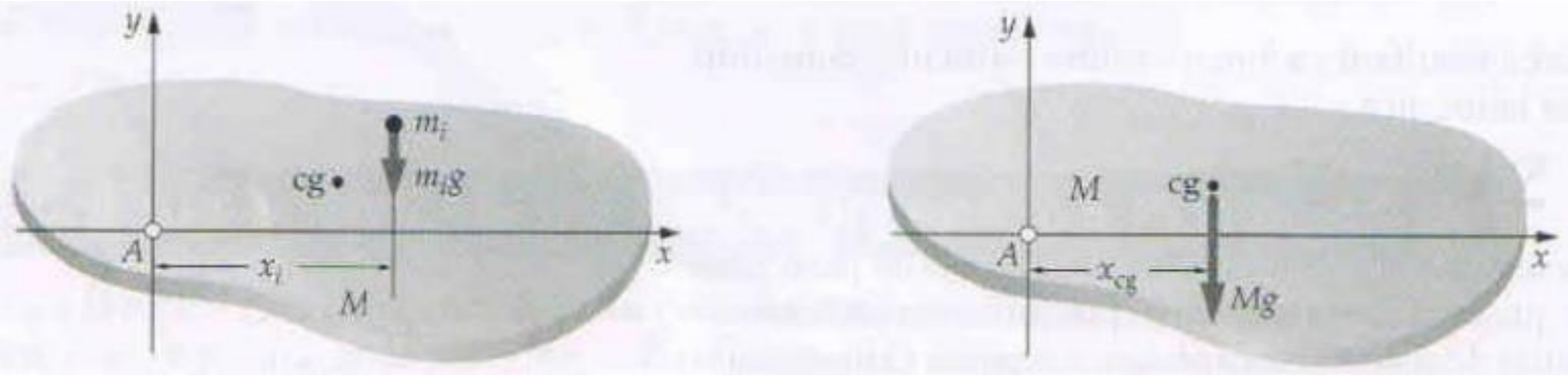




Vetor perpendicular ao plano formado pelos vetores **r** e **F**

Torque devido a gravidade

Considere um corpo extenso de massa M, apoiado pelo eixo A e submetido à força gravitacional.



O torque sobre cada partícula constituinte será: $\tau_i = F_i r_i = m_i g x_i$

O torque total sobre o corpo será a soma dos torques sobre todas as partículas constituintes:

$$\tau_{ext_{res}} = \sum m_i g x_i = \left(\sum m_i x_i\right) g \Rightarrow \boxed{\tau_{ext_{res}} = M x_{cm} g}$$

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots} = \frac{\sum m_i x_i}{M}$$

Torque devido a gravidade

Momento Angular

- Desempenha o mesmo papel na rotação que o momento linear na translação.

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} \qquad \vec{L}$$

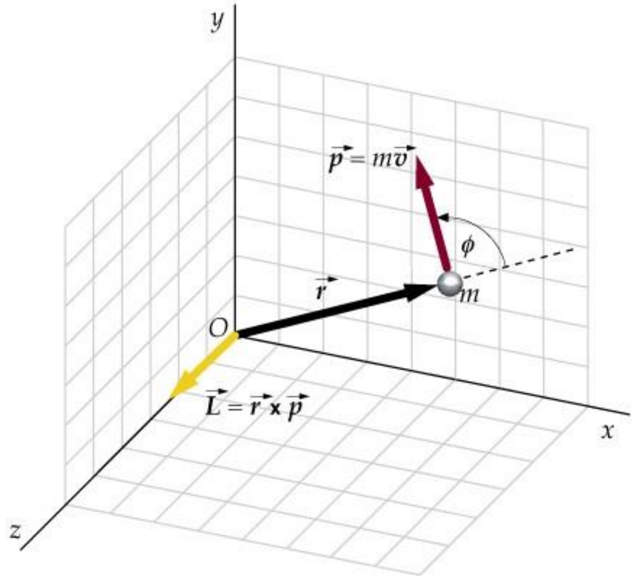
Quantidade de movimento angular ou Momento angular em relação a origem

- Segunda Lei de Newton para rotação:

$$\boxed{\vec{\tau} = \frac{d(\vec{L})}{dt} = I\vec{\alpha}}$$

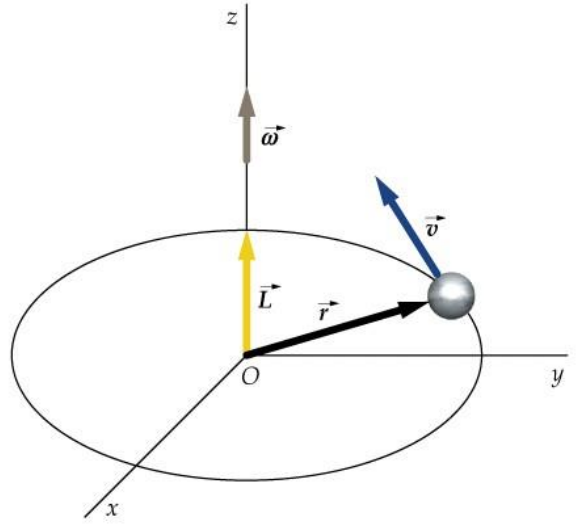
Partícula de massa m, na posição r, se movendo com uma velocidade v.

Movimento linear : $\vec{p} = m\vec{v}$



Momento Angular: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

$$L = rmv$$



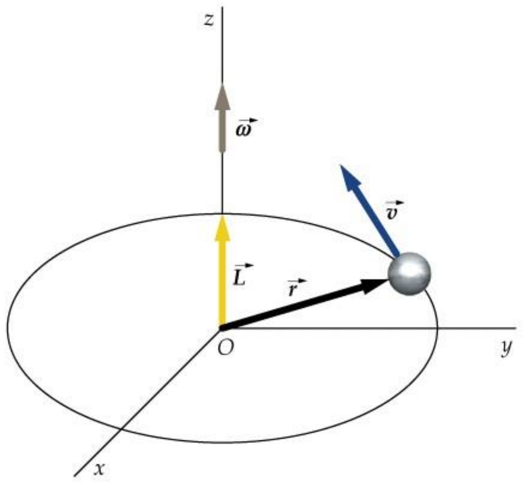
Por analogia à quantidade de movimento linear:

$$L = rm(\omega r) = mr^2\omega = I\omega$$

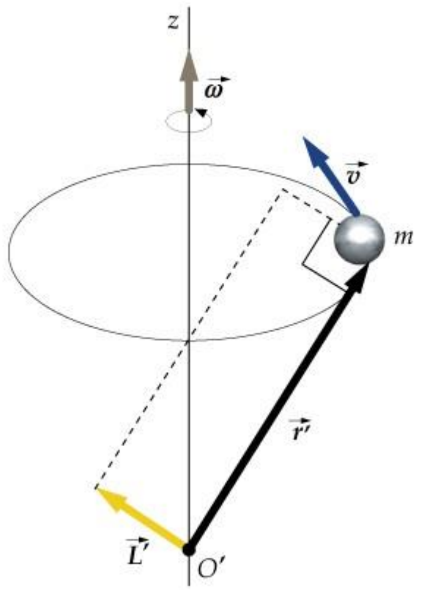
$$\boxed{\vec{L} = I\vec{\omega}}$$

Momento Angular:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$



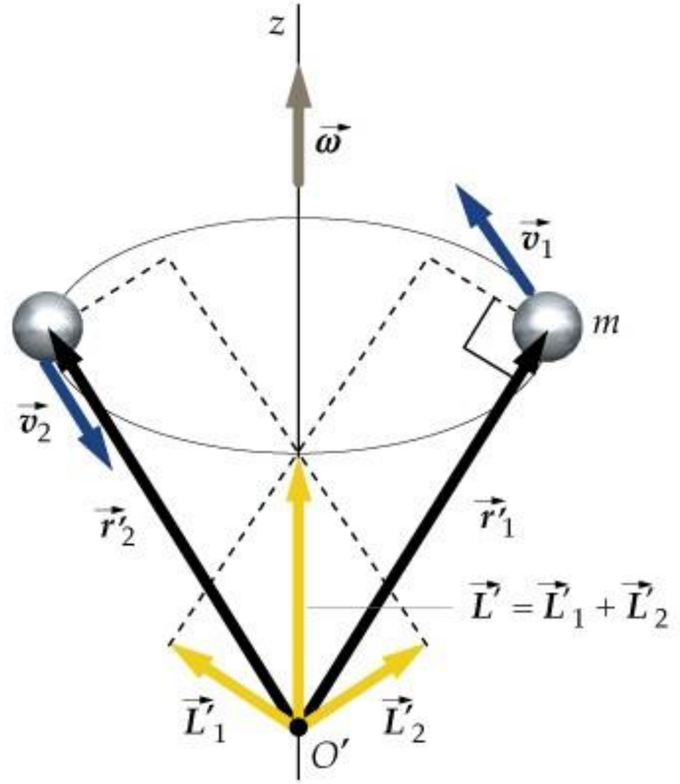
Se mudarmos a origem do sistema de coordenadas, em relação ao plano da órbita, obtemos um novo valor de L que não é paralelo a ω.



A última definição não é universal!!

Com duas massas simétricas em relação ao eixo z, **L** seria paralelo a **ω**.

CONCLUSÃO: A última definição é válida apenas quando temos simetria em relação ao eixo de rotação!



$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

Dinâmica e Rotação

Cinemática de uma partícula		Rotação de um CR	
Posição	x	Ângulo	θ
Velocidade	v_x	Velocidade angular	ω_z
Aceleração	a_x	Aceleração angular	α_z
Massa	m	Momento de inércia	I
Energia cinética	$\frac{1}{2}mv_x^2$	Energia cinética	$\frac{1}{2}I\omega_z^2$
Força	F_x	Torque	τ_z
2a. Lei	$\sum F_{x,ext} = ma_x$	2a. Lei	$\sum \tau_{z,ext} = I\alpha_z$
Trabalho	$dW = F_x dx$	Trabalho	$dW = \tau_z d\theta$
Potência	$P = F_x v_x$	Potência	$P = \tau_z \omega_z$
Momento linear	$\vec{p} = m\vec{v}$	Momento angular	$\vec{L} = I\vec{\omega}$
2a. Lei	$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	2a. Lei	$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

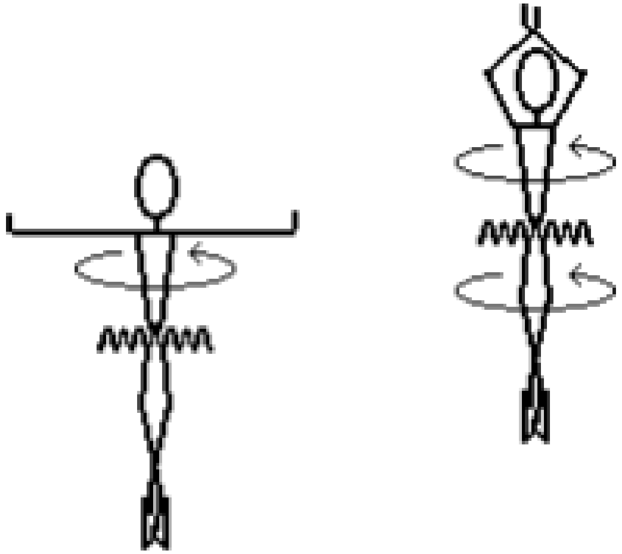
DEMONSTRAÇÃO – CADEIRA GIRATÓRIA

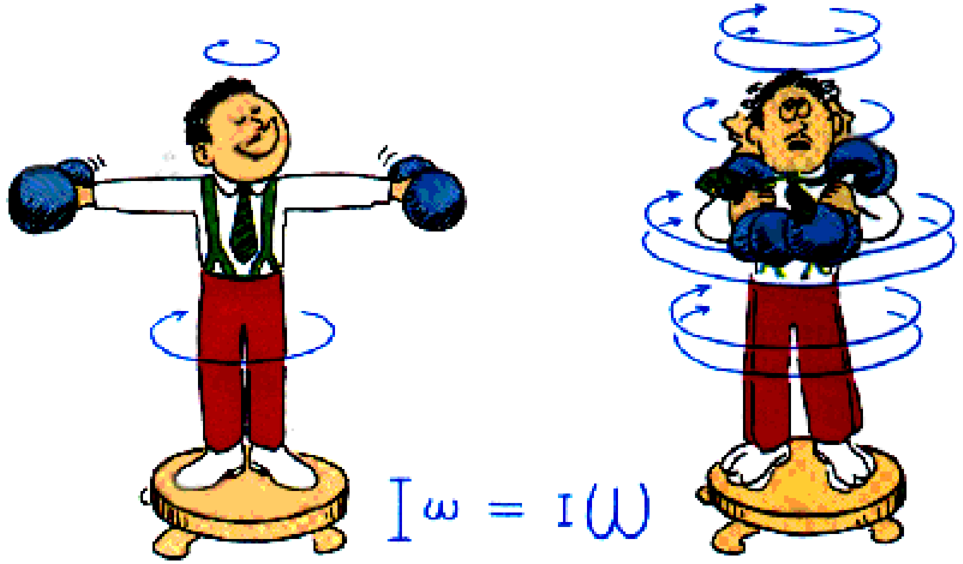
Demonstração – cadeira giratória

Conservação da Quantidade de Movimento Angular

- Torque externo resultante sobre um sistema é nulo!

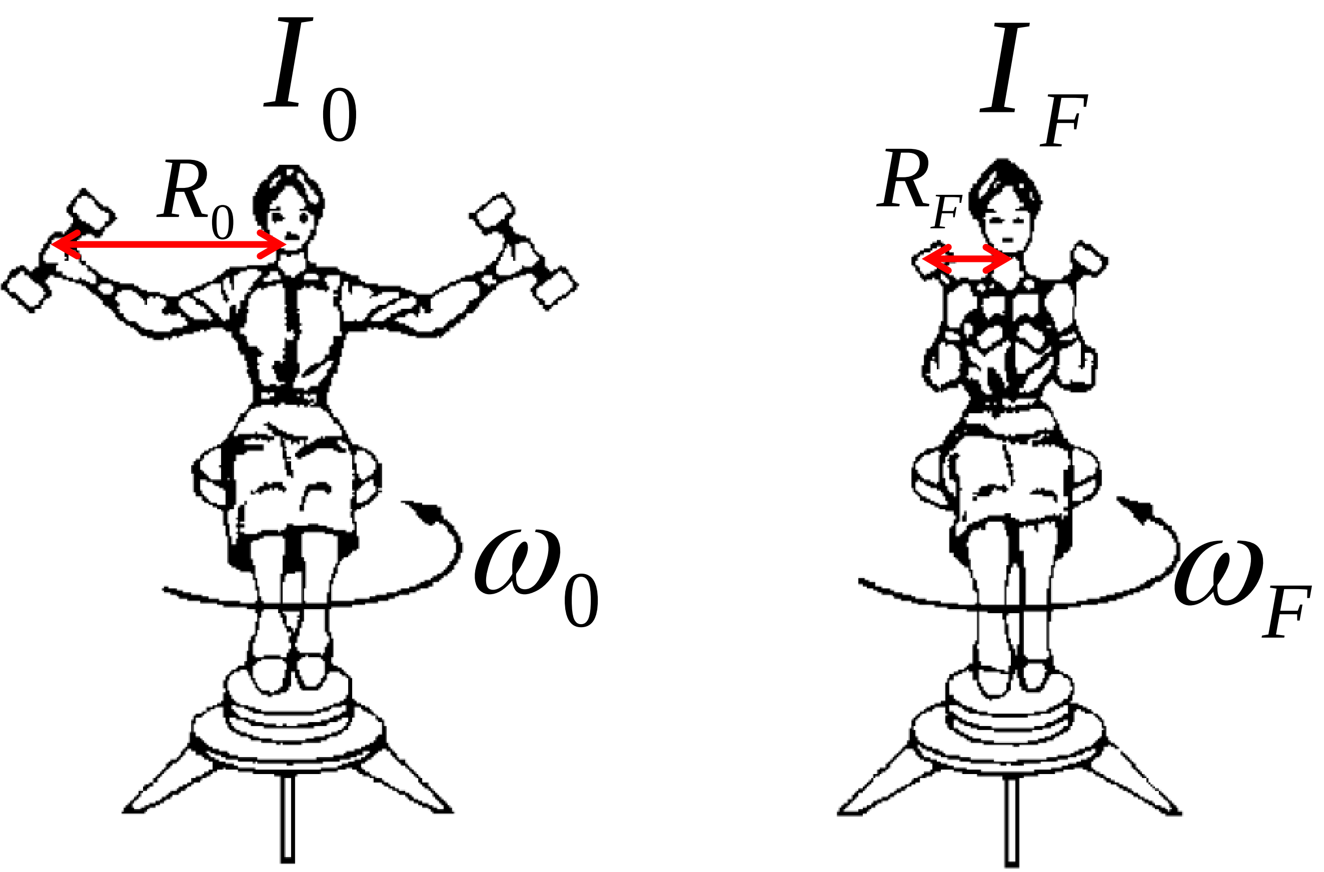
$$\vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{L}_{sis} = cte$$



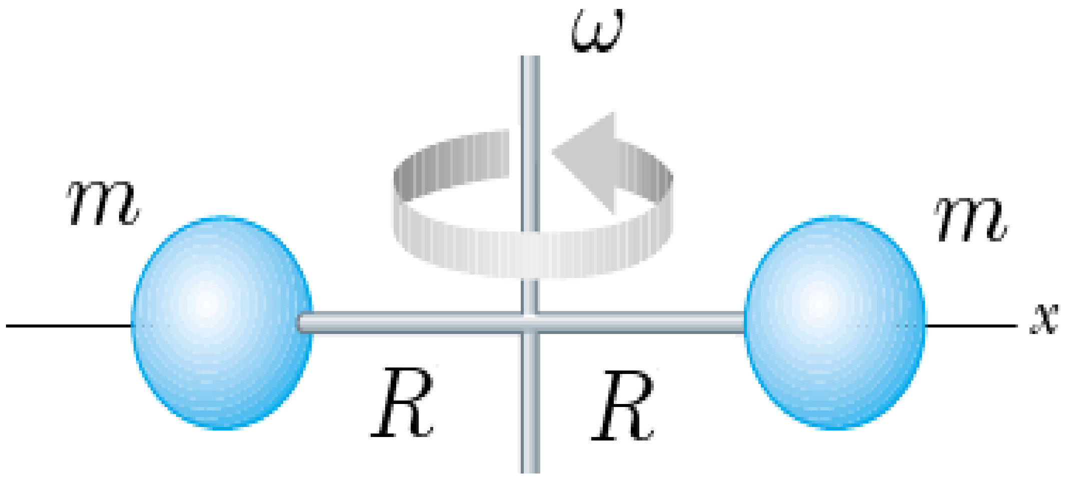


O peso não gera torque em relação ao eixo que passa pelo centro de massa.

Cadeira Giratoria



Momento angular para cada massa



$$I = mR^2$$

$$I_0\omega_0 = I_F\omega_F$$

$$\frac{I_0}{I_F}\omega_0 = \omega_F$$

Se considerado como massas pontuais:

$$\frac{R_0^{\ 2}}{R_F^{\ 2}}\omega_0 = \omega_F$$

Supondo: $R_F = \frac{1}{2}R_0$

Nesse sistema não há torque devido a forças externas, somente internas.

Logo há conservação do momento angular.

$$4\omega_0 = \omega_F$$

Variação da Energia Cinetica Rotacional

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} I_F \omega_F^2 - \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2$$

$$\frac{I_0}{I_F}\omega_0 = \omega_F$$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} I_F \left(\frac{I_0}{I_F}\omega_0 \right)^2 - \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2$$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} \omega_0^2 \left(\frac{I_0^2}{I_F} - I_0 \right)$$

Supondo: $R_F = \frac{1}{2} R_0$

Se considerarmos massas pontuais: $I = 2mR^2$

$$\Delta E_c = m\omega_0^2 \left(\frac{R_0^4}{R_F^2} - R_0^2 \right)$$

$$\Delta E_c = m\omega_0^2 \left(4R_0^2 - R_0^2 \right)$$

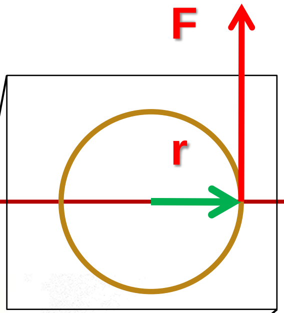
$$\Delta E_c = 3m\omega_0^2 R_0^2$$

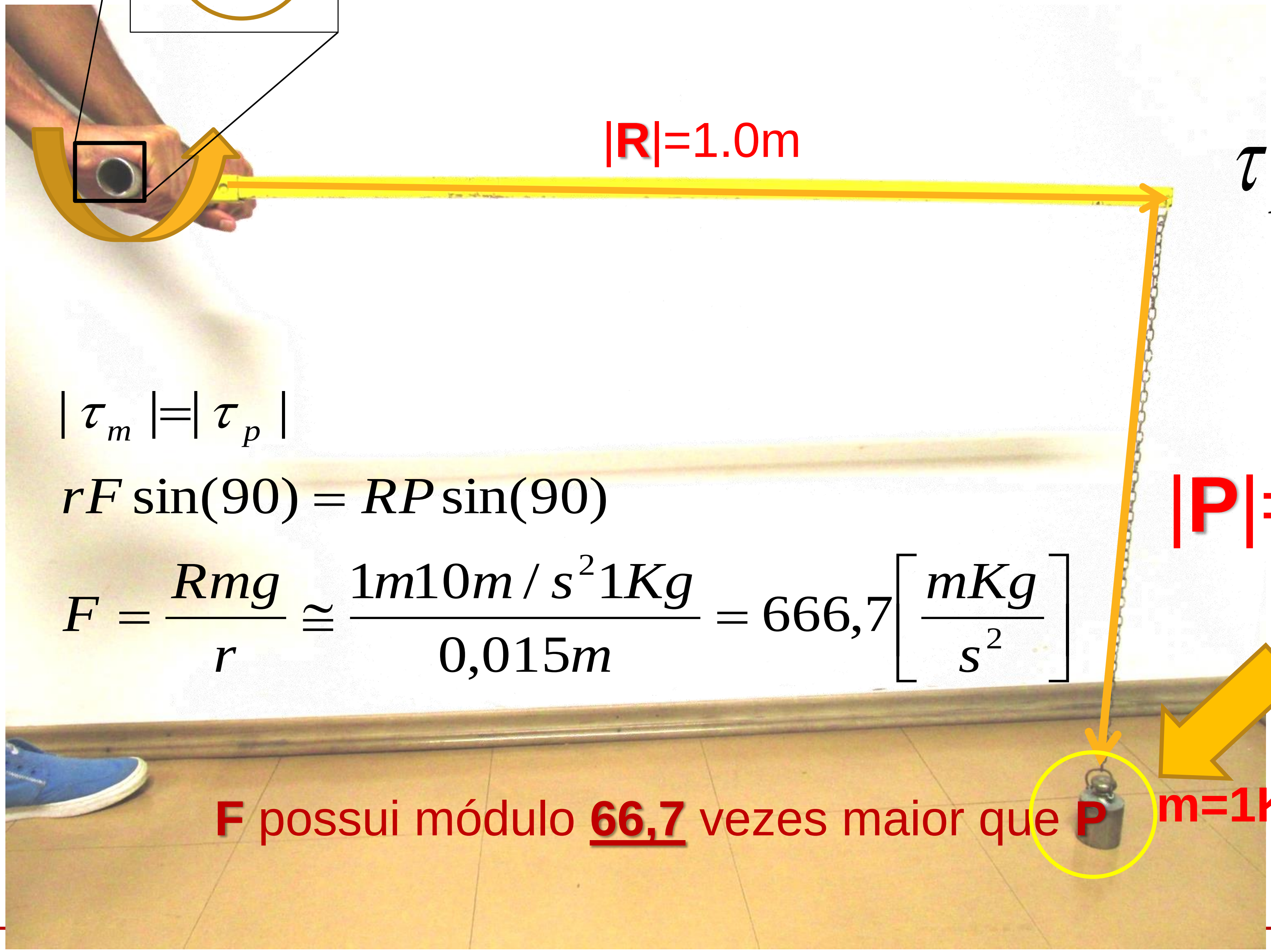
DEMONSTRAÇÃO – LEVANTANDO 1 KG

Desafio: você consegue erguer um objeto de massa 1Kg?

|**r**|=0, 015m

$$\tau_m = r \times F$$





$$\tau_P = R \times P$$

$$|\tau_m| = |\tau_p|$$

$$rF\sin(90) = RP\sin(90)$$

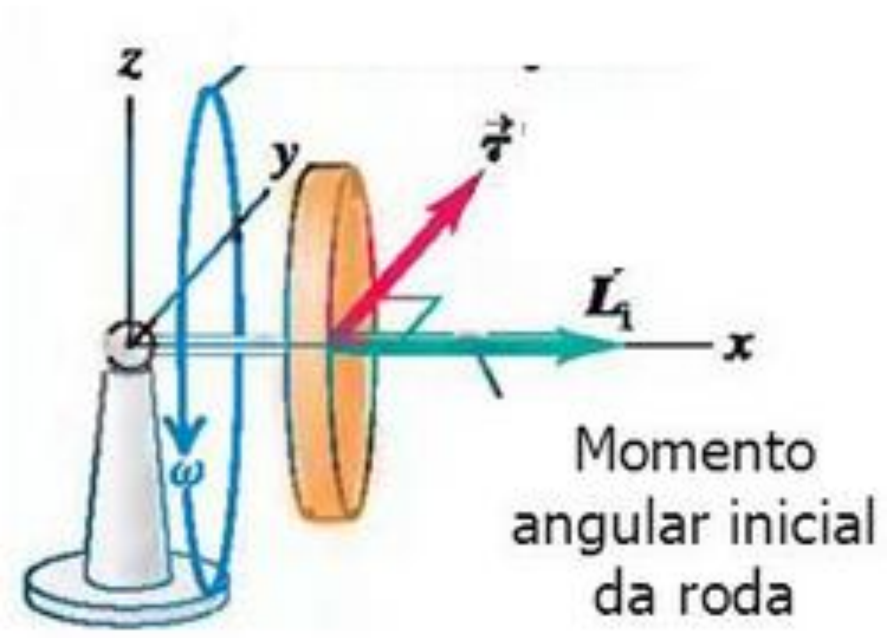
$$F = \frac{Rmg}{r} \cong \frac{1m10m/s^2 1Kg}{0{,}015m} = 666{,}7\left[\frac{mKg}{s^2}\right]$$

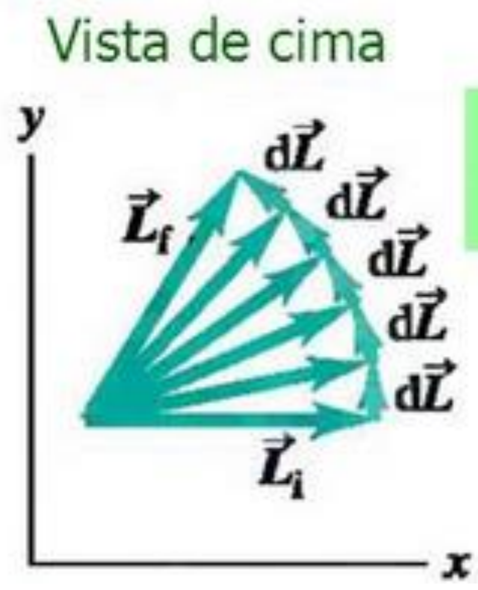
|**P**|=m|**g**|

F possui módulo **66,7** vezes maior que **P**

DEMONSTRAÇÃO – GIROSCÓPIO

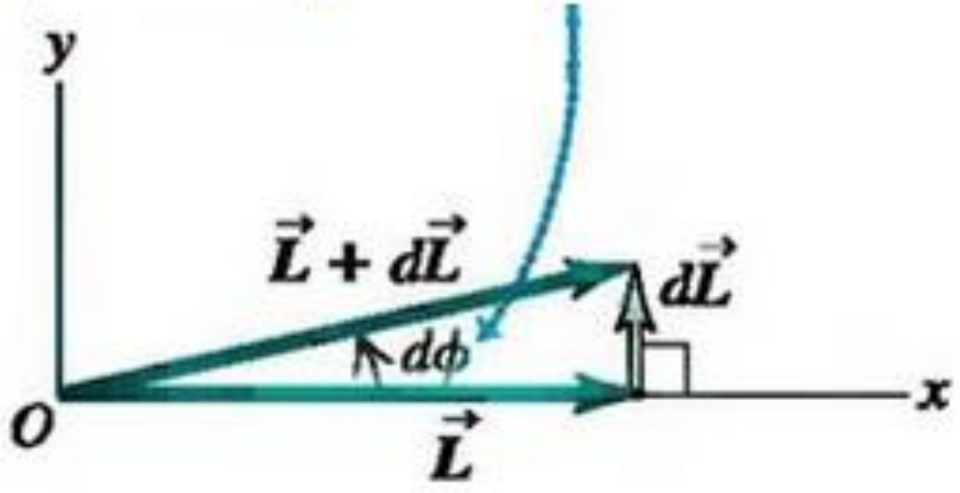
Roda girando:





Precessão do momento angular

Em um intervalo dt, o momento angular e o eixo de rotação da roda precessionam por um ângulo $d\varphi$



Segunda lei de Newton para a rotação:

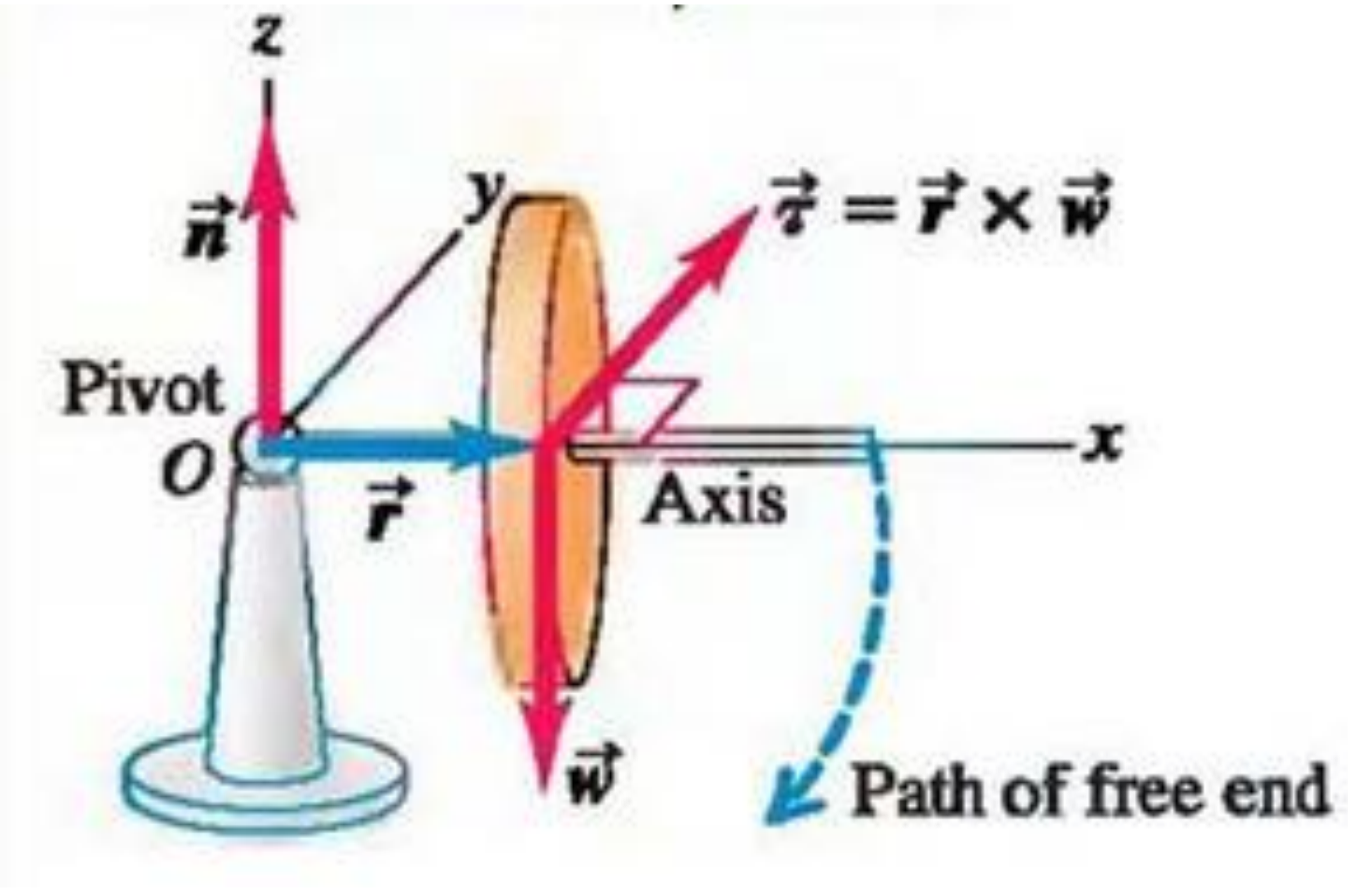
$$\vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

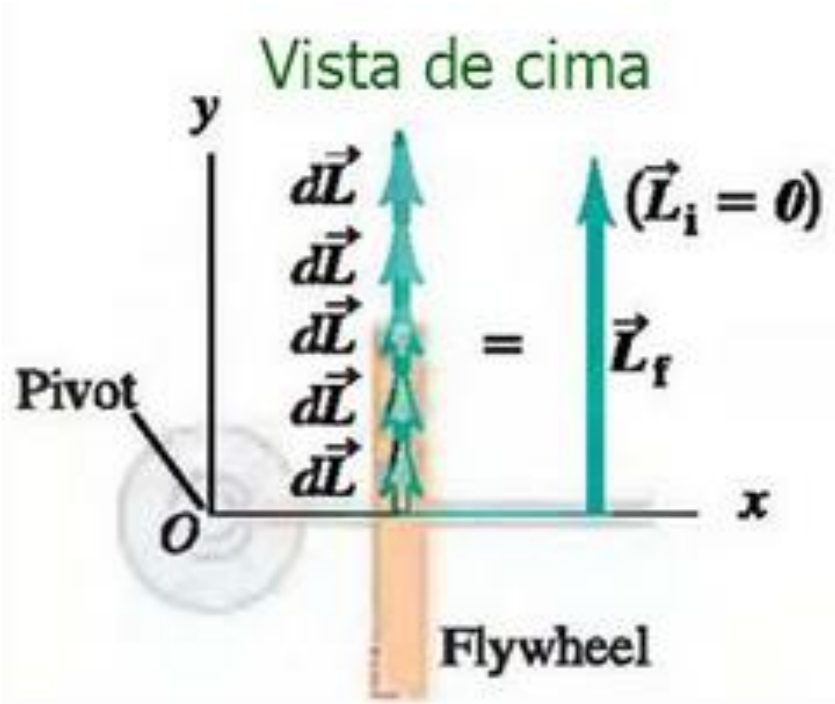
$$\boxed{\vec{L} = I_{cm}\vec{\omega}} \qquad \boxed{\vec{\tau}_{ext} = \vec{r}_{cm} \times M\vec{g}}$$

Giroscópio

"Roda de bicicleta": consiste em um corpo em rotação, com o seu eixo livre para alterar a sua direção.

Roda parada:



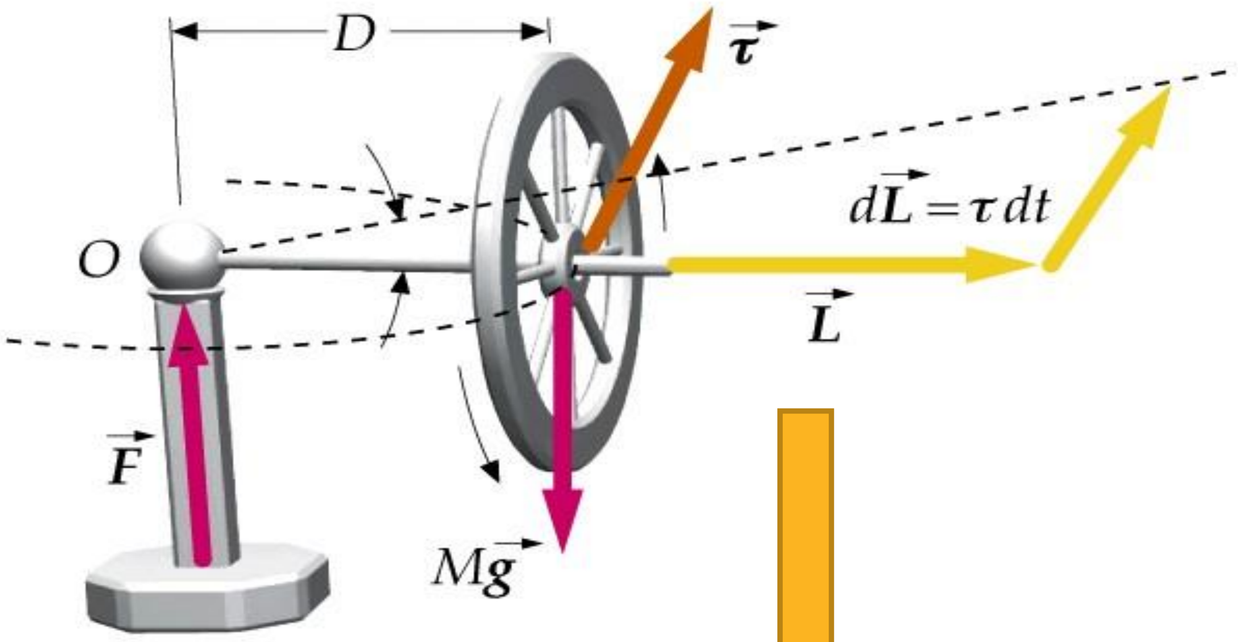


$$\vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{\tau}_{ext} = \vec{r}_{cm} \times M\vec{g} = DMg}$$

$$\boxed{\vec{L} = I_{cm}\vec{\omega}}$$

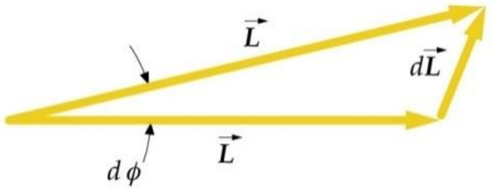


Movimento de precessão

A velocidade de precessão da roda em torno do eixo vertical é dada por:

$$\omega_p = \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{L}\frac{dL}{dt}$$

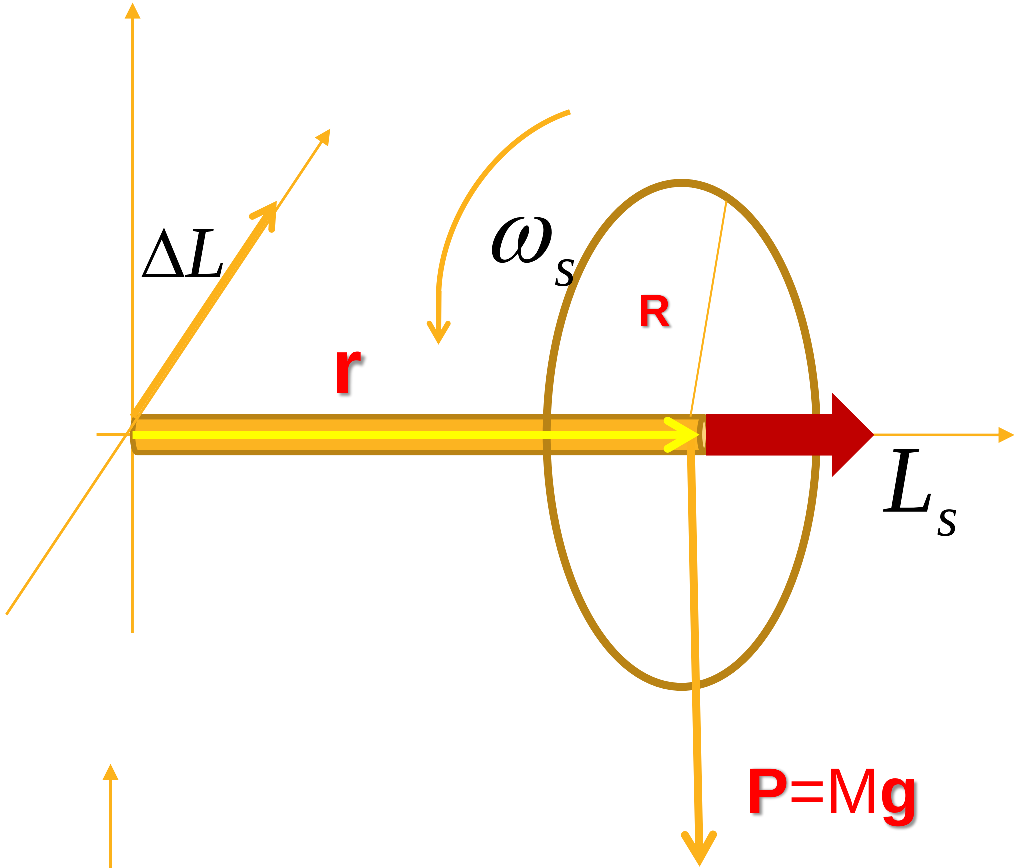
$$\omega_p = \frac{1}{L}\tau_{ext} = \frac{MgD}{I_{cm}\omega}$$

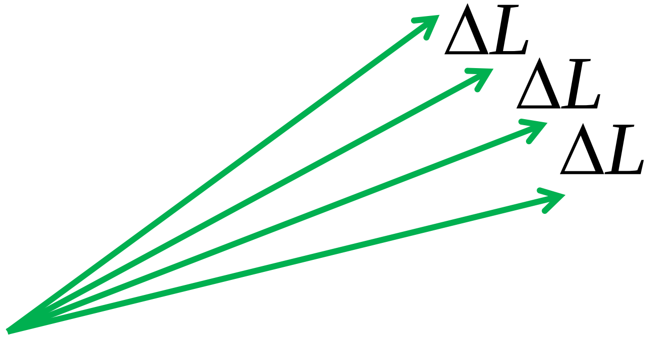


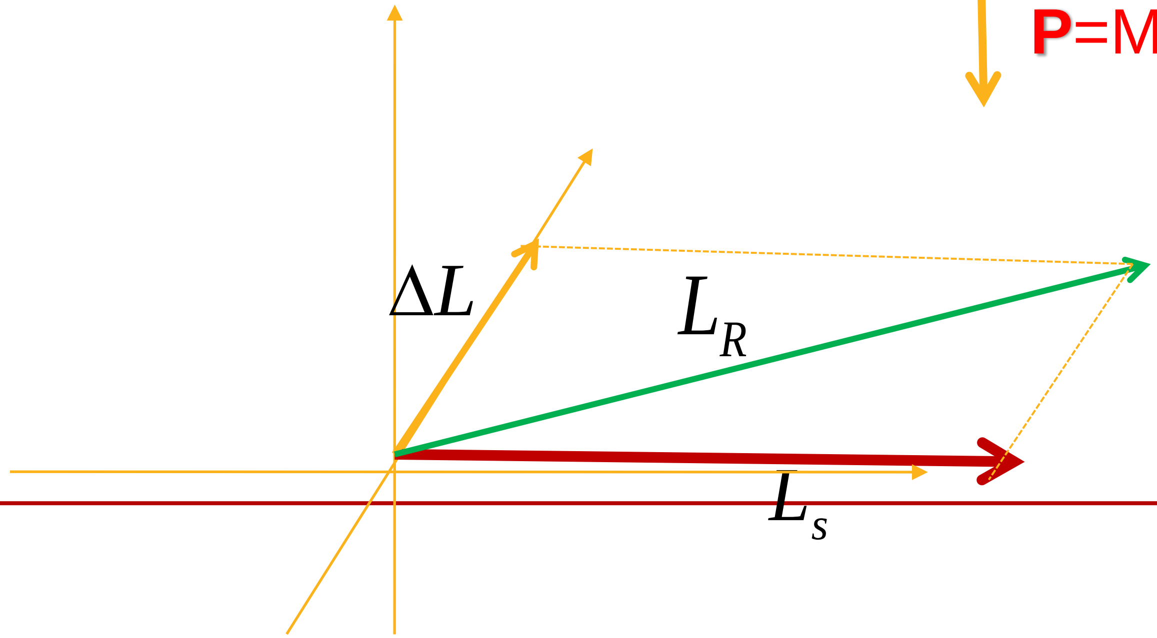
$$dL = L d\phi$$

$$\frac{dL}{dt} = L\frac{d\phi}{dt}$$

Giroscópio

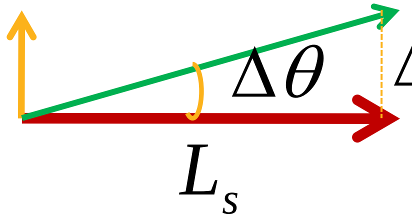






Qual será o sentido da rotação de precessão se a roda girar no sentido contrário?

Calculando a freqüência de precessão



ΔL em Δt

$$\Delta\theta = \frac{\Delta L}{L_s}$$

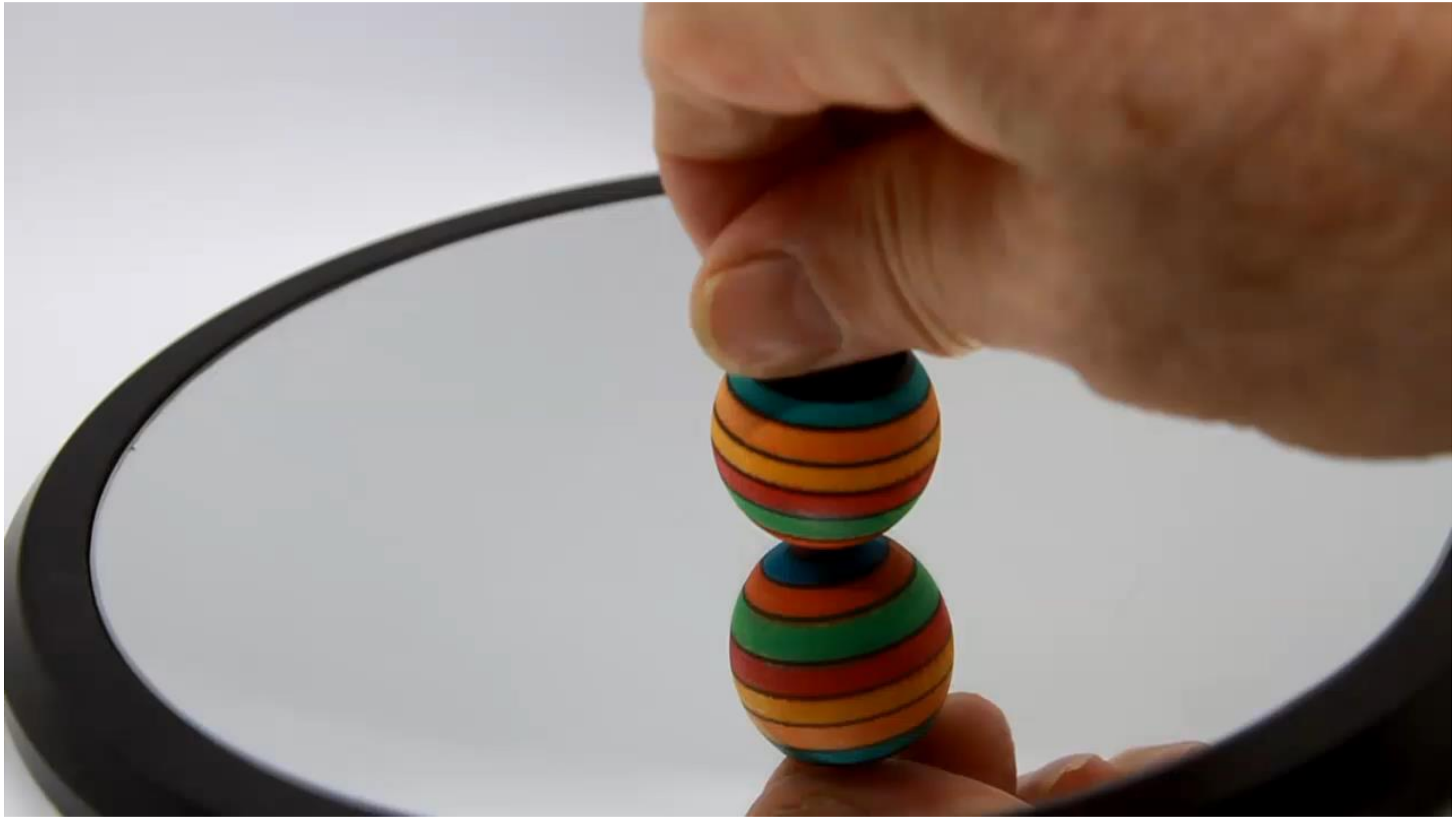
$$\Delta L = L_s \Delta\theta$$

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = L_s \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

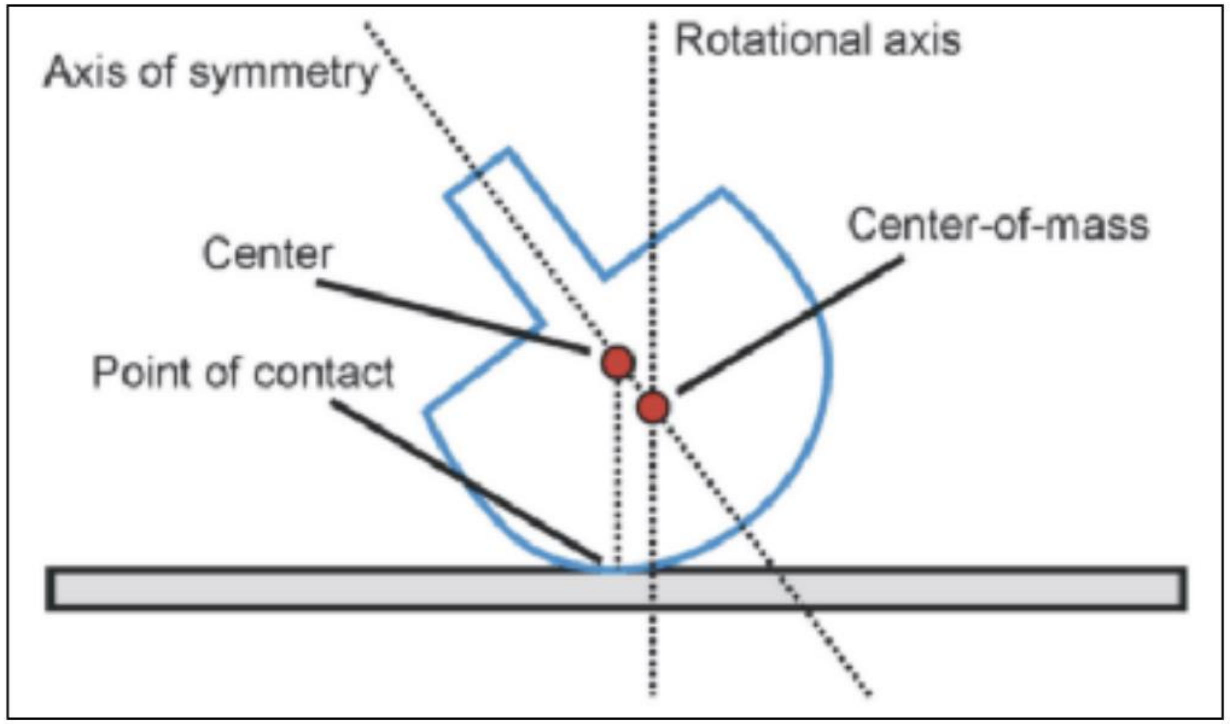
$$\tau = L_s \omega_{prec}$$

$$\omega_{prec} = \frac{\tau}{L_s} = \frac{rMg}{I_{Roda}\omega_s}$$

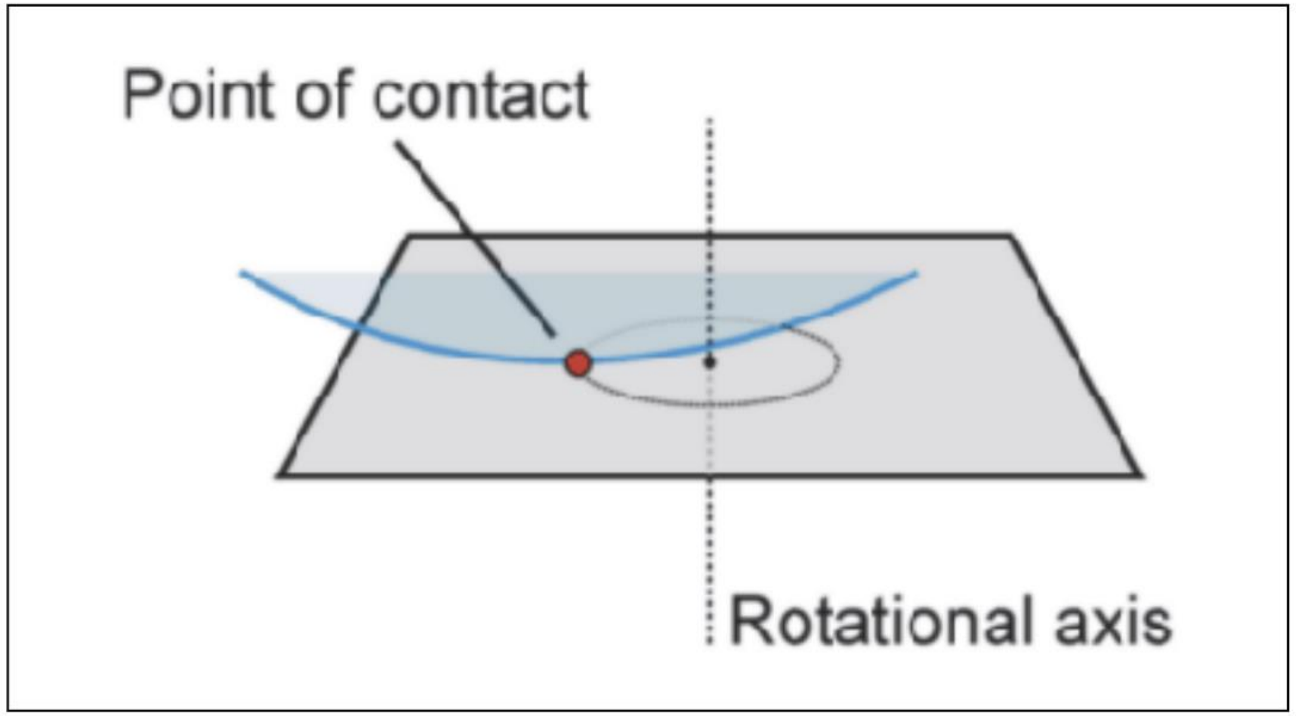
DEMONSTRAÇÃO – PIÃO INVERTIDO



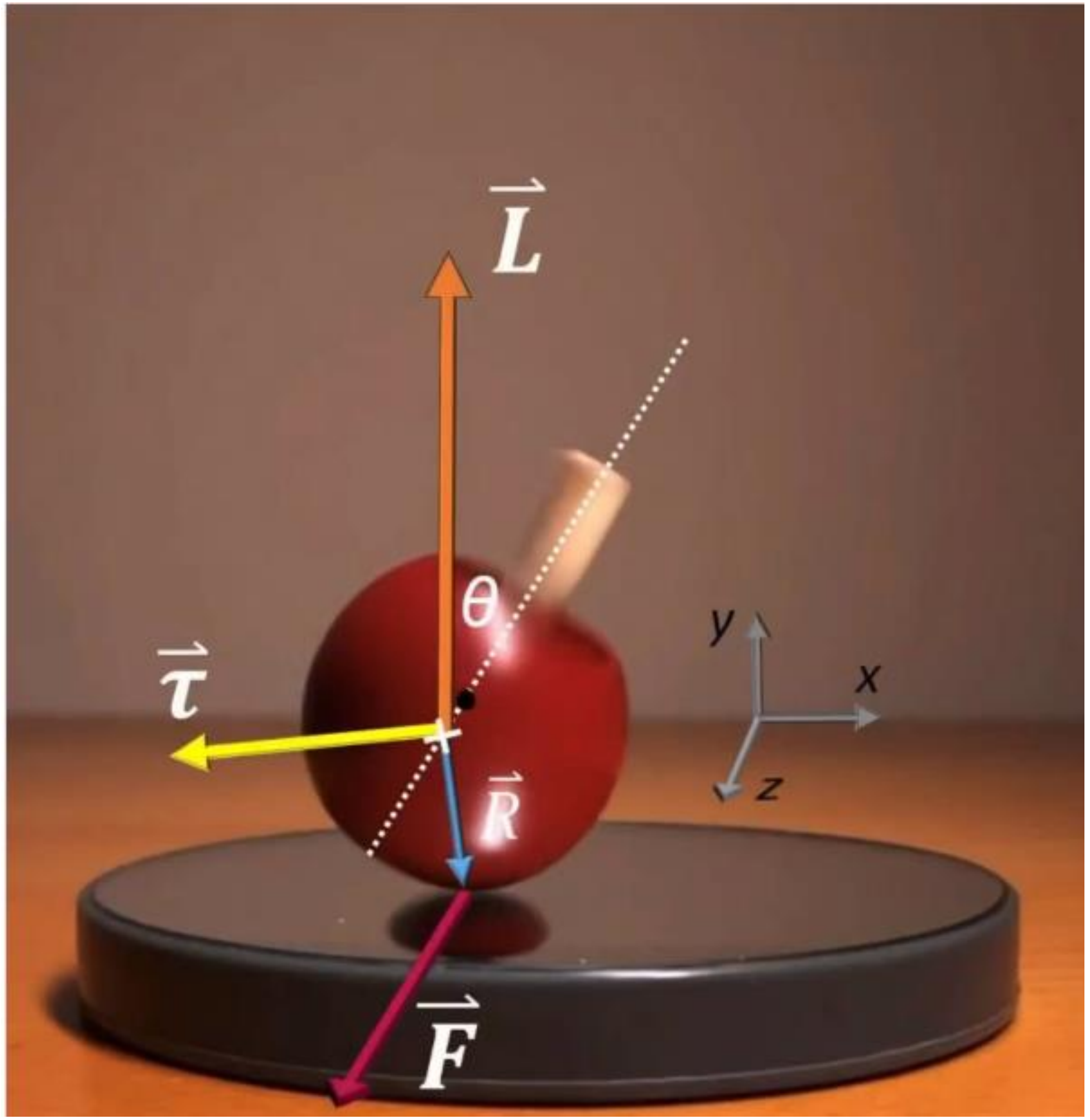

Why
Spinning
Is
Stable

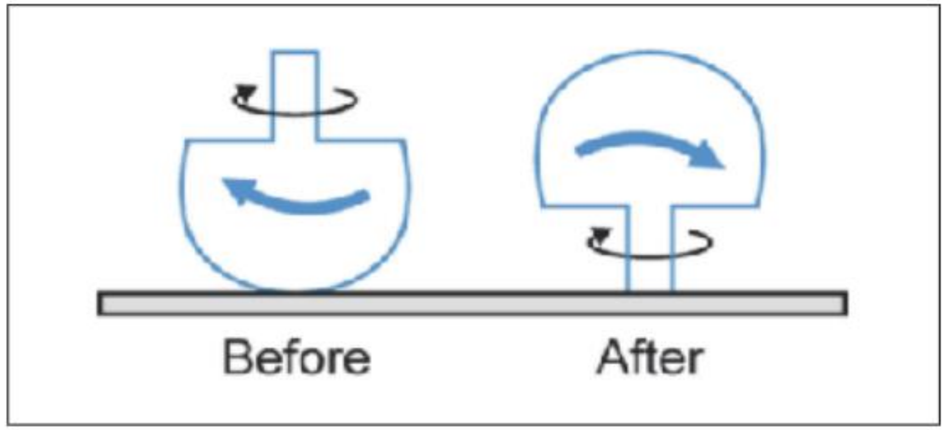


Since the geometrical center of the sphere does not coincide with the center-of-mass, the point of contact with the surface will not coincide with the rotational axis.

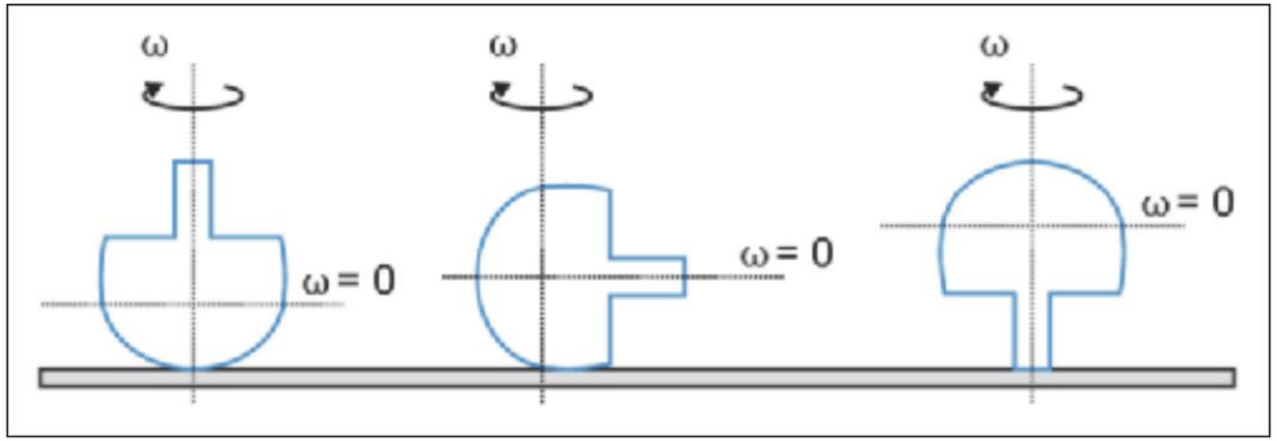


Since the point of contact does not coincide with the rotational axis, the Tippe Top will slide over the surface in a circle around the rotational axis. The sliding friction supplies the torque needed for the inversion of the top.



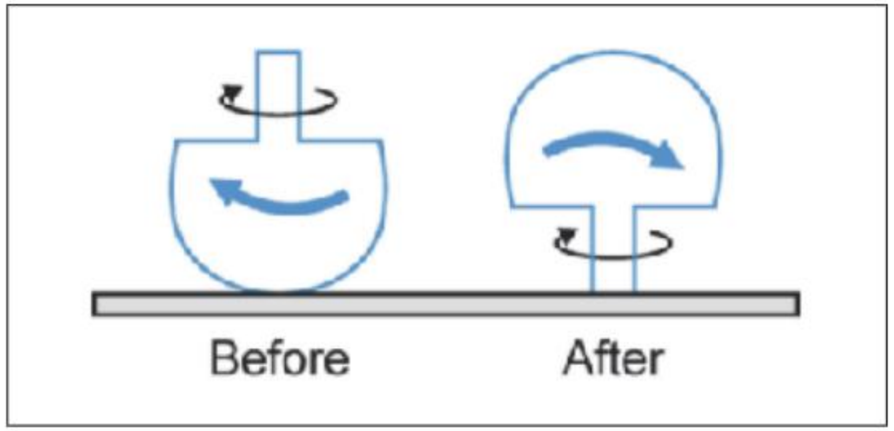


The Tippe Top is a spinning top, which will automatically lift its center of mass while it starts to turn in the opposite direction.

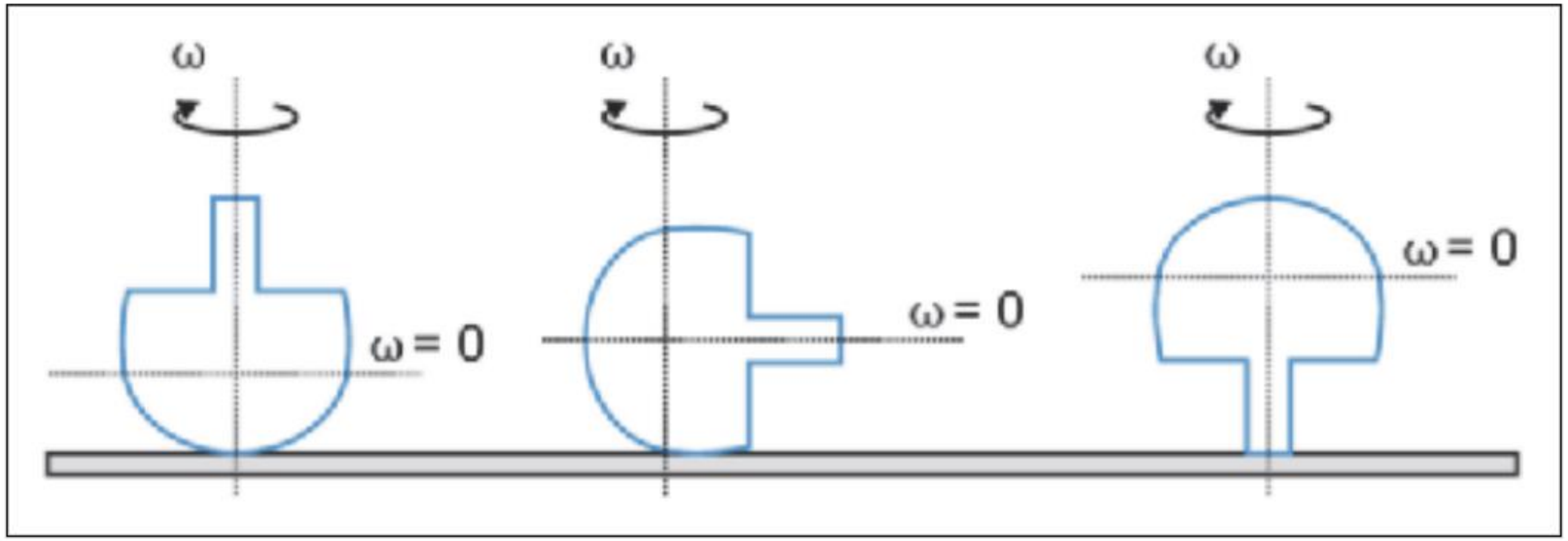


Rotational axes of a Tippe Top. When the top is almost (not completely) horisontal, the rotation around the stem will stop and start to rotate the other way.

Helene Sperl



The Tippe Top is a spinning top, which will automatically lift its center of mass while it starts to turn in the opposite direction.



Rotational axes of a Tippe Top. When the top is almost (not completely) horisontal, the rotation around the stem will stop and start to rotate the other way.

[Reversing Tops - page 3 (kreiselparadies.de)]