O Teorema de Noether

Considere uma ação em n dimensões dada em termos de uma densidade de Lagrangiana

$$S = \int d^n x \, \mathcal{L}(\phi_\alpha, \partial\phi_\alpha)$$

onde ϕ_α são os campos da teoria, e onde os índices α podem ser de campos escalares, vetoriais, espinoriais, etc.

Suponha que tenhamos uma transformação dos campos

$$\delta \phi_\alpha = \varepsilon \, F_\alpha(\phi_\alpha, \partial\phi_\alpha)$$

onde ε é um parâmetro infinitesimal da transformação, e $F_\alpha(\phi_\alpha, \partial\phi_\alpha)$ é um funcional dos campos que define a transformação.

Suponha que a ação S seja invariante por transformações globais, mas não locais, i.e.

$$\delta S = 0 \qquad \text{p/} \quad \varepsilon \ \text{constante}$$

Nesta variação as equações de Euler-Lagrange ~~nã~~ não podem ser utilizadas, pois qualquer ação tem variação nula quando vale as eqs. de Euler-Lagrange.

O "truque" (devido provavelmente à Gell Mann) é fazer o parâmetro ε depender das coordenadas do espaço-tempo x^μ.

Como a ação S não é invariante por transformações locais, i.e., ε não constante, teremos que a variação da ação (sem usar Euler-Lagrange) será:

$$\delta S = \int d^n x \, \partial_\mu \varepsilon \, J^\mu$$

Não temos termos proporcionais a ε pois assumimos que S é invariante por transformações globais.

Integrando por partes e tomando as variações dos campos nulas no infinito, temos que

$$\delta S = -\int d^n x \, \varepsilon \, \partial_\mu J^\mu$$

Mas se usarmos as equações de Euler-Lagrange temos que $\delta S = 0$ para qualquer variação dos campos

Portanto, quando valem as equações de movimento de Euler-Lagrange devemos ter

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

pois ε é arbitrário. Mas isto é uma lei de conservação. De fato, tomando a integral

$$Q = \int d^{n-1}x \; J^0$$

onde a integral é nas coordenadas espaciais x^i, e não na temporal x^0. Portanto

$$\frac{\partial Q}{\partial x^0} = \int d^{n-1}x \; \partial_0 J^0 = -\int d^{n-1}x \; \partial_i J^i$$

$$= \int d^{n-1}x \; \vec{\nabla}.\vec{J} = \int d\vec{\Sigma}.\vec{J}$$

pelo teorema de Gauss. Supondo que a corrente $\vec{J}$ seja nula no infinito espacial, obtemos que Q é constante no tempo $(x^0 \equiv ct)$

$$\frac{dQ}{dt} = 0$$

Este é o teorema de Noether. Para cada simetria global da ação temos uma quantidade conservada.

O exemplo das translações

Vamos considerar translações globais no espaço de Minkowski

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu}$$

onde a^{μ} é um quadri-vetor constante.

Para o teorema de Noether precisamos considerar transformações infinitesimais. E para usar o "truque" do Gell-Mann temos que fazer o parâmetro infinitesimal dependente dos pontos do espaço-tempo. Portanto, temos

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu}(x) \quad , \quad \delta x^{\mu} = \varepsilon^{\mu}(x)$$

Antes de mais nada temos que ver como elemento de volume d^4x, na integral da ação, transforma sob tais transformações. Temos

$$dx'^{\mu} = dx^{\mu} + \frac{\partial \varepsilon^{\mu}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu}$$

$$= \left(\delta^{\mu}_{\nu} + \partial_{\nu}\varepsilon^{\mu}\right) dx^{\nu}$$

O elemento de volume transforma pelo Jacobiano

$$d^4x' = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| d^4x$$

e

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu + \partial_\nu \varepsilon^\mu$$

O Jacobiano em primeira ordem em ε é

$$\begin{vmatrix} (1+\partial_0 \varepsilon^0) & \partial_1 \varepsilon^0 & \partial_2 \varepsilon^0 & \partial_3 \varepsilon^0 \\ \partial_0 \varepsilon^1 & (1+\partial_1 \varepsilon^1) & \partial_2 \varepsilon^1 & \partial_3 \varepsilon^1 \\ \partial_0 \varepsilon^2 & \cancel{\partial_2}\, \partial_1 \varepsilon^2 & (1+\partial_2 \varepsilon^2) & \partial_3 \varepsilon^2 \\ \partial_0 \varepsilon^3 & \partial_1 \varepsilon^3 & \partial_2 \varepsilon^3 & (1+\partial_3 \varepsilon^3) \end{vmatrix}$$

e daí

$$\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| = \partial_\mu \varepsilon^\mu + O(\varepsilon^2)$$

Por outro lado temos que

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} = \frac{\partial (x'^\nu - \varepsilon^\nu)}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

$$= \left(\delta^\nu_\mu - \frac{\partial \varepsilon^\nu}{\partial x'^\mu}\right)\frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

Mas $\dfrac{\partial \varepsilon^\nu}{\partial x'^\mu} = \dfrac{\partial \varepsilon^\nu}{\partial x^\mu} + O(\varepsilon^2)$ e daí

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \left(\delta^\nu_\mu - \partial_\mu \varepsilon^\nu\right)\frac{\partial}{\partial x^\nu} + O(\varepsilon^2)$$

Todos os campos, independentemente de seus spins, são invariantes por translação

Campo escalar $\phi'(x') = \phi(x)$

" vetorial $A'_\mu(x') = A_\mu(x)$

" espinorial $\psi'(x') = \psi(x)$

etc.

Portanto, se tivermos uma Lagrangiana, que depende dos campos e suas primeiras derivadas, i.e.

$$S = \int d^4x \, \mathcal{L}(\Phi_r, \partial\Phi_r)$$

onde Φ_r denota qualquer tipo de campo temos:

$$\delta\Phi_r = 0$$

$$\delta\partial_\mu\Phi_r = -\partial_\mu\varepsilon^\nu\partial_\nu\Phi_r$$

e daí

$$\delta S = \int \delta(d^4x)\,\mathcal{L} + \int d^4x \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\Phi_r}\delta\partial_\mu\Phi_r + \int d^4x \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Phi_r}\delta\Phi_r$$

$$= \int d^4x \left(\partial_\mu\varepsilon^\mu\mathcal{L} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\Phi_r}\partial_\mu\varepsilon^\nu\partial_\nu\Phi_r\right)$$

$$= \int d^4x \, \partial_\mu\varepsilon^\nu\left(\delta^\mu_\nu\mathcal{L} - \frac{\delta\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\Phi_r}\partial_\nu\Phi_r\right)$$

Definimos

$$\boxed{T^{\mu}{}_{\nu} \equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \Phi_r} \partial_\nu \Phi_r - \delta^{\mu}{}_{\nu} \mathcal{L}}$$ (gen)

e portanto

$$\delta S = - \int d^4x \; \partial_\mu \epsilon^\nu \, T^\mu{}_\nu$$

Integrando por partes e usando o fato que a transformação zera no infinito, temos

$$\delta S = - \int d^4x \; \epsilon^\nu \, \partial_\mu T^\mu{}_\nu$$

Quando valem as equações de Euler-Lagrange a variação da ação deve ser nula para qualquer ϵ^ν. Logo devemos ter

$$\partial_\mu T^\mu{}_\nu = 0$$

$T^\mu{}_\nu$ é o tensor energia-momento, e ele é conservado.

Para o caso do campo de Klein Gordon real, com um potencial, onde

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi - V(\phi)$$

~~Tako~~ Temos que

$$\boxed{T^{\mu}{}_{\nu} = \partial^{\mu}\phi\,\partial_{\nu}\phi - \delta^{\mu}_{\nu}\left(\tfrac{1}{2}\partial_{\rho}\phi\,\partial^{\rho}\phi - m^2\phi^2 - V(\phi)\right)} \quad (CGR)$$

Nota que

$$T^{0}{}_{0} = \frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_i\phi)^2 + m^2\phi^2 + V(\phi)$$

e esta é a densidade de ~~m~~ energia, ou Hamiltoniana

Para o campo de Klein-Gordon complexo temos

$$\mathcal{L} = \partial_{\mu}\phi^{*}\partial^{\mu}\phi \; \cancel{\tfrac{1}{2}\partial_{\mu}\phi\,\partial^{\mu}\phi^{*}} - m\,\phi^{*}\phi - V(|\phi|^2)$$

e daí

$$T^{\mu}{}_{\nu} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\partial\partial_{\mu}\phi}\partial_{\nu}\phi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_{\mu}\phi^{*}}\partial_{\nu}\phi^{*} - \delta^{\mu}_{\nu}\mathcal{L}$$

$$\boxed{T^{\mu}{}_{\nu} = \partial^{\mu}\phi^{*}\partial_{\nu}\phi + \partial^{\mu}\phi\,\partial_{\nu}\phi^{*} - \delta^{\mu}{}_{\nu}\left(\partial_{\rho}\phi^{*}\partial^{\rho}\phi - m^2|\phi|^2 - V(|\phi|^2)\right)}$$

(CGC)

e

$$\cancel{T^{0}{}_{0} = |\partial^{0}\phi|^{*}}$$

$$T^{0}{}_{0} = |\partial_0\phi|^2 + |\partial_i\phi|^2 + m^2|\phi|^2 + V(|\phi|^2)$$

que novamente é a densidade de energia.

Para o campo de Maxwell temos

$$S = -\frac{1}{4}\int d^4x \, F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

e daí

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu A_\nu} = -\frac{1}{2} F^{\rho\sigma} \frac{\delta F_{\rho\sigma}}{\delta \partial_\mu A_\nu} = -\frac{1}{2} F^{\rho\sigma} \left(\delta^\mu_\rho \delta^\nu_\sigma - \delta^\mu_\sigma \delta^\nu_\rho \right)$$

$$= - F^{\mu\nu}$$

Logo

$$T^\mu{}_\nu = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu A_\rho} \partial_\nu A_\rho - \delta^\mu_\nu \mathcal{L}$$

$$= - F^{\mu\rho} \partial_\nu A_\rho + \frac{1}{4} \delta^\mu_\nu F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$$

Portanto

$$\boxed{T^\mu{}_\nu = -F^{\mu\rho} \partial_\nu A_\rho + \frac{1}{4} \delta^\mu_\nu F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}} \qquad \text{(Max pre)}$$

e daí

$$T^0{}_0 = - F^{0i} \partial_0 A_i + \frac{1}{4} \left(F^{0i} F_{0i} + F^{i0} F_{i0} + F^{ij} F_{ij} \right)$$

$$= F_{0i} \partial_0 A_i + \frac{1}{2} \left(- F_{0i} F_{0i} + F_{12}^2 + F_{13}^2 + F_{23}^2 \right)$$

Nota que os tensores energia momento do campo de Klein-Gordon tanto real quanto complexo, são simétricos,

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu\phi\partial^\nu\phi - \eta^{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\partial_\rho\phi\partial^\rho\phi - m^2\phi^2 - V(\phi)\right)$$

e

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu\phi^*\partial^\nu\phi + \partial^\nu\phi^*\partial^\mu\phi - \eta^{\mu\nu}\left(\partial_\rho\phi^*\partial^\rho\phi - m^2|\phi|^2 - V(|\phi|^2)\right)$$

No entanto o tensor energia-momento de Maxwell não é

$$T^{\mu\nu} = -F^{\mu\rho}\partial^\nu A_\rho + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$$

Nota que tais tensores foram obtidos da ação pelo teorema de Noether, e a ação tem algumas arbitrariedades, podemos adicionar divergências à Lagrangiana que as eqs. de Euler-Lagrange não mudam.

Portanto, podemos adicionar ao tensor energia-momento tensores que são trivialmente conservados, e que não modificam os valores das cargas.

$$T^{\mu\nu} \to T^{\mu\nu} + \Delta T^{\mu\nu}$$

tal que $\quad \partial_\mu \Delta T^{\mu\nu} = 0 \quad$ e $\quad \int d^3x\, \Delta T^{0\mu} = 0$

No caso de Maxwell podemos tomar

$$\Delta T^{\mu\nu} = \partial_\rho (F^{\mu\rho} A^\nu)$$

pois

$$\partial_\mu \Delta T^{\mu\nu} = \partial_\mu \partial_\rho (F^{\mu\rho} A^\nu) =$$

$$= \partial_\mu (\partial_\rho F^{\mu\rho} A^\nu + F^{\mu\rho} \partial_\rho A^\nu)$$

$$= \partial_\mu \partial_\rho F^{\mu\rho} A^\nu + \partial_\rho F^{\mu\rho} \partial_\mu A^\nu + \partial_\mu F^{\mu\rho} \partial_\rho A^\nu +$$

$$+ F^{\mu\rho} \partial_\mu \partial_\rho A^\nu$$

Temos

$$\partial_\mu \partial_\rho F^{\mu\rho} = 0 \, , \quad F^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\rho A^\nu = 0$$

por antisimetria, e

$$\partial_\rho F^{\mu\rho} \partial_\mu A^\nu = 0 \quad , \quad \partial_\mu F^{\mu\rho} \partial_\rho A^\nu = 0$$

pelas equações de Maxwell $\quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$

Logo

$$\partial_\mu \Delta T^{\mu\nu} = 0$$

Além disso

$$\int d^3x \, \Delta T^{0\nu} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \, \partial_\rho (F^{0\rho} A^\nu) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \, \partial_i (F^{0i} A^\nu)$$

$$= \int_{\partial \mathbb{R}^3} d\Sigma_i \, F^{0i} A^\nu = 0$$

Portanto, o tensor energia-momento "improved" de Maxwell fica

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \Delta T^{\mu\nu}$$

$$= -F^{\mu\rho}\partial^{\nu}A_{\rho} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} + \partial_{\rho}(F^{\mu\rho}A^{\nu})$$

$$= F^{\mu\rho}(\partial_{\rho}A^{\nu} - \partial^{\nu}A_{\rho}) + \cancel{\partial_{\rho}F^{\mu\rho}}^{\,0}A^{\nu} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$$

devido às eqs. de Maxwell

Logo

$$\boxed{\tilde{T}^{\mu\nu} = F^{\mu\rho}F_{\rho}{}^{\nu} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}}$$

Este tensor é:

- simétrico
- invariante de gauge $(A_{\mu} \to A_{\mu} + \partial_{\mu}\alpha\ ,\ F_{\mu\nu} \to F_{\mu\nu})$
- a de traço nulo

$$\tilde{T}^{\mu}{}_{\mu} = F^{\mu\rho}F_{\rho\mu} + \frac{1}{4}\delta^{\mu}_{\mu}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$$

$$= -F^{\mu\nu}F_{\mu\rho} + F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = 0$$

Como veremos, a simetria está ligada à conservação do tensor momento-angular, e o traço nulo ligado à invariância conforme da teoria de Maxwell sem fontes.

As cargas conservadas são as componentes do quadrimomento P^μ:

$$P^\mu = \int d^3x \; \tilde{T}^{0\mu}$$

Temos que

$$P^0 = \int d^3x \left(F^{0\rho} F_\rho{}^0 + \frac{1}{4} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \right)$$

$$= \int d^3x \left(F^{0i} F_{i0} + \frac{1}{4} \left(F^{0i} F_{0i} + F^{i0} F_{i0} + F^{ij} F_{ij} \right) \right)$$

$$= \int d^3x \frac{1}{2} \left(F_{0i} F_{0i} + F^{12} F_{12} + F^{13} F_{13} + F_{23} F^{23} \right)$$

$$= \int d^3x \; \frac{1}{2} \left(B_i^2 + E_i^2 \right)$$

e

$$P^i = \int d^3x \; \tilde{T}^{0i} = \int d^3x \; F^{0\rho} F_\rho{}^i = \int d^3x \; F^{0j} F_j{}^i$$

$$= \int d^3x \; F_{0j} F_{ji} = -\int d^3x \; E_j B_k \varepsilon_{jik} =$$

$$= \int d^3x \left(\vec{E} \times \vec{B} \right)_i$$

O exemplo das transformações de Lorentz

As transformações de Lorentz são dadas por

$$dx^{\mu\prime} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, dx^{\nu}$$

onde as matrizes $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ não dependem das coordenadas do espaço-tempo. Portanto, elas são transformações globais.

Expandindo temos (Veja página 120)

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu} + O(\omega^2)$$

onde $\omega^{\mu}{}_{\nu}$ são parâmetros ~~são~~ constantes e pequenos

O campo vetorial A^{μ} transforma como

$$A^{\mu\prime} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, A^{\nu}$$

e portanto

$$\delta A^{\mu} = \omega^{\mu}{}_{\nu}\, A^{\nu}$$

Logo, $\omega^{\mu}{}_{\nu}$ faz o papel do parâmetro ε do teorema de Noether discutido na seção anterior.

Como vimos na página 121 ω, com os dois índices "embaixo" ~~[illegible]~~ (ou "em cima") é anti-simétrico, i.e.

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$$

Portanto, como $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, temos 6 transformações independentes, e se nossa teoria é invariante de Lorentz, temos 6 quantidades conservadas.

Nota que

$$\delta A^{\mu} = \omega^{\mu}{}_{\nu} A^{\nu} = \omega^{\mu\nu} A_{\nu} = -\omega^{\nu\mu} A_{\nu}$$

e portanto

$$\delta A_{\mu} = -\omega^{\nu}{}_{\mu} A_{\nu}$$

Considere a transformação das coordenadas Cartesianas

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$$

e $\Lambda^{-1\rho}{}_{\mu} x^{\mu\prime} = \Lambda^{-1\rho}{}_{\mu} \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} = x^{\rho}$

ou $x^{\mu} = \Lambda^{-1\mu}{}_{\nu} x^{\nu\prime}$

~~ou $\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\rho}}$~~

Vamos usar o "truque" de fazer os parâmetros da transformação dependerem dos pontos do espaço-tempo. Logo, $\Lambda^\mu{}_\nu$ depende do espaço-tempo. Daí

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} = \frac{\partial(\Lambda^{-1\nu}{}_\rho x'^\rho)}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} =$$

$$= \Lambda^{-1\nu}{}_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \Lambda^{-1\nu}{}_\rho}{\partial x'^\mu} x'^\rho \frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

Mas

$$\Lambda^{-1\nu}{}_\mu = \delta^\nu{}_\mu - \omega^\nu{}_\mu + O(\omega^2)$$

pois

$$\Lambda^\mu{}_\nu \Lambda^{-1\nu}{}_\rho = \left(\delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu + O(\omega^2)\right)\left(\delta^\nu{}_\rho - \omega^\nu{}_\rho + O(\omega^2)\right)$$

$$= \delta^\mu{}_\rho + \omega^\mu{}_\rho - \omega^\mu{}_\rho + O(\omega^2) = \delta^\mu{}_\rho + O(\omega^2)$$

Portanto

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \left(\delta^\nu{}_\mu - \omega^\nu{}_\mu + O(\omega^2)\right)\frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x'^\mu}\left(\delta^\nu_\rho - \omega^\nu{}_\rho + O(\omega^2)\right)\left(x^\rho + \omega^\rho{}_\sigma x^\sigma + O(\omega^2)\right)\frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

Pois $x'^\rho = \Lambda^\rho{}_\sigma x^\sigma = \left(\delta^\rho{}_\sigma + \omega^\rho{}_\sigma + O(\omega^2)\right) x^\sigma$

Ou seja:

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \omega^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \omega^\nu{}_\rho}{\partial x'^\mu} x^\rho \frac{\partial}{\partial x^\nu} + O(\omega^2)$$

Mas

$$\frac{\partial \omega^\nu{}_\rho}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial \omega^\nu{}_\rho}{\partial x^\mu} + O(\omega^2)$$

Daí

$$\delta \partial_\mu = - \omega^\nu{}_\mu \partial_\nu - \frac{\partial \omega^\nu{}_\rho}{\partial x^\mu} x^\rho \partial_\nu$$

$$= - \left(\omega^\nu{}_\mu + \partial_\mu \omega^\nu{}_\rho x^\rho \right) \partial_\nu$$

Considere agora o tensor dos campos

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Temos

$$\delta F_{\mu\nu} = - \left(\omega^\rho{}_\mu + \partial_\mu \omega^\rho{}_\sigma x^\sigma \right) \partial_\rho A_\nu - \partial_\mu \left(\omega^\rho{}_\nu A_\rho \right)$$

$$+ \left(\omega^\rho{}_\nu + \partial_\nu \omega^\rho{}_\sigma x^\sigma \right) \partial_\rho A_\mu + \partial_\nu \left(\omega^\rho{}_\mu A_\rho \right)$$

$$= - \omega^\rho{}_\mu \partial_\rho A_\nu - \omega^\rho{}_\nu \partial_\mu A_\rho + \omega^\rho{}_\nu \partial_\rho A_\mu + \omega^\rho{}_\mu \partial_\nu A_\rho$$

$$- \partial_\mu \omega^\rho{}_\sigma x^\sigma \partial_\rho A_\nu - \partial_\mu \omega^\rho{}_\nu A_\rho$$

$$+ \partial_\nu \omega^\rho{}_\sigma x^\sigma \partial_\rho A_\mu + \partial_\nu \omega^\rho{}_\mu A_\rho$$

$$\delta F_{\mu\nu} = -\omega^\rho{}_\mu F_{\rho\nu} - \omega^\rho{}_\nu F_{\mu\rho}$$
$$-\partial_\mu \omega^\rho{}_\sigma x^\sigma \partial_\rho A_\nu + \partial_\nu \omega^\rho{}_\sigma x^\sigma \partial_\rho A_\mu$$
$$-(\partial_\mu \omega^\rho{}_\nu - \partial_\nu \omega^\rho{}_\mu) A_\rho$$

~~Since the metric $\eta^{\mu\nu}$ is Lorentz invariant~~

Como a métrica de ~~Lorentz~~ Minkowski é invariante por transformações de Lorentz, temos que a operação de subir e descer índices comuta com a variação δ. Daí

$$\delta F^{\mu\nu} = -\omega^{\rho\mu} F_\rho{}^\nu - \omega^{\rho\nu} F^\mu{}_\rho$$
$$-\partial^\mu \omega^\rho{}_\sigma x^\sigma \partial_\rho A^\nu + \partial^\nu \omega^\rho{}_\sigma x^\sigma \partial_\rho A^\mu$$
$$-(\partial^\mu \omega^{\rho\nu} - \partial^\nu \omega^{\rho\mu}) A_\rho$$

$$= \omega^\mu{}_\rho F^{\rho\nu} + \omega^\nu{}_\rho F^{\mu\rho}$$
$$-\partial^\mu \omega^\rho{}_\sigma x^\sigma \partial_\rho A^\nu + \partial^\nu \omega^\rho{}_\sigma x^\sigma \partial_\rho A^\mu$$
$$-(\partial^\mu \omega^{\rho\nu} - \partial^\nu \omega^{\rho\mu}) A_\rho$$

Daí

$$\delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = F_{\mu\nu}\delta F^{\mu\nu} + F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu}$$

$$= F_{\mu\nu}(\omega^\mu{}_\rho F^{\rho\nu} + \omega^\nu{}_\rho F^{\mu\rho}) - F^{\mu\nu}(\omega^\rho{}_\mu F_{\rho\nu} + \omega^\rho{}_\nu F_{\mu\rho})$$
$$+ F_{\mu\nu}[-\partial^\mu \omega^\rho{}_\sigma x^\sigma \partial_\rho A^\nu + \partial^\nu \omega^\rho{}_\sigma x^\sigma \partial_\rho A^\mu] - 2F_{\mu\nu}\partial^\mu \omega^{\rho\nu} A_\rho$$
$$+ F^{\mu\nu}[-\partial_\mu \omega^\rho{}_\sigma x^\sigma \partial_\rho A_\nu + \partial_\nu \omega^\rho{}_\sigma x^\sigma \partial_\rho A_\mu] - F^{\mu\nu}[\partial_\mu \omega^\rho{}_\nu - \partial_\nu \omega^\rho{}_\mu] A_\rho$$

Os termos envolvendo os ω's cancelam ficamos apenas com os termos envolvendo derivadas dos ω's. Ou seja:

$$\delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = -4F_{\mu\nu}\left[\partial^\mu \omega^\rho{}_\sigma x^\sigma \partial_\rho A^\nu + \partial^\mu \omega^{\rho\nu} A_\rho\right]$$

Portanto, $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ é realmente invariante quando os ω's são constantes.

Podemos escrever ainda

$$\delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = -4F^{\mu\nu}\left[\partial_\mu \omega_{\rho\sigma} x^\sigma \partial^\rho A_\nu + \partial_\mu \omega_{\rho\nu} A^\rho\right]$$

$$= -4\,\partial_\mu \omega_{\rho\sigma} F^{\mu\nu}\left[x^\sigma \partial^\rho A_\nu + \delta^\sigma_\nu A^\rho\right]$$

Para transformações <u>globais</u> de Lorentz, onde os ω's são constantes, o elemento de volume é invariante. Mas quando usamos o "truque" de fazê-los dependentes do espaço-tempo, isto não é mais verdade.

Temos

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \to \delta x^\mu = \omega^\mu{}_\nu x^\nu + O(\omega^2)$$

$$x'^\mu = (\delta^\mu{}_\rho + \omega^\mu{}_\rho)x^\rho + O(\omega^2)$$

Portanto

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = (\delta^\mu{}_\rho + \omega^\mu{}_\rho)\,\delta^\rho{}_\nu + \partial_\nu \omega^\mu{}_\rho\, x^\rho + O(\omega^2)$$

$$= \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu + \partial_\nu \omega^\mu{}_\rho\, x^\rho + O(\omega^2)$$

Logo todos os termos de $\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|$ fora da diagonal são pelo menos de ordem ω. Logo o determinante de $\frac{\partial x'}{\partial x}$ em primeira ordem em ω será o traço de $\frac{\partial x'}{\partial x}$ em primeira ordem (veja página 133 para o análogo das translações)

Daí

$$d^4x' = (\omega^\mu{}_\mu + \partial_\mu \omega^\mu{}_\rho\, x^\rho)\, d^4x + O(\omega^2)$$

Mas da página 143 temos que $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ e

$$\omega^\mu{}_\mu = \eta_{\mu\nu}\,\omega^{\mu\nu} = 0$$

Portanto d^4x é invariante para ω constante, e

$$d^4x' = \partial_\mu \omega^\mu{}_\rho\, x^\rho\, d^4x + O(\omega^2)$$

A ação de Maxwell é

$$S = -\frac{1}{4}\int d^4x \; F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

e

$$\delta S = -\frac{1}{4}\int \delta(d^4x)\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\int d^4x \; \delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$$

Usando os resultados anteriores temos:

$$\delta S = \int d^4x \Big[-\frac{1}{4}\partial_\mu \omega^\mu{}_\rho x^\rho \; F_{\lambda\sigma}F^{\lambda\sigma} +$$

$$+ \partial_\mu \omega_{\rho\sigma} \; F^{\mu\nu}\{ x^\sigma \partial^\rho A_\nu + \delta^\sigma_\nu A^\rho \Big]$$

$$= \int d^4x \; \partial_\mu \omega_{\rho\sigma} \Big\{ F^{\mu\nu}(x^\sigma \partial^\rho A_\nu + \delta^\sigma_\nu A^\rho) + \frac{1}{4} F_{\lambda\delta}F^{\lambda\delta}\, \eta^{\mu\sigma} x^\rho \Big\}$$

$$= -\frac{1}{2}\int d^4x \; \omega_{\rho\sigma}\, \partial_\mu M^{\mu\rho\sigma}$$

onde integramos por partes e usamos que as transformações na borda são nulas, e onde definimos

$$\cancel{M^{\mu\rho\sigma} = F^{\mu\nu}(x^\sigma \partial^\rho A_\nu + \delta^\sigma_\nu A^\rho) + \frac{1}{4}\, x^\rho F^{\lambda}\, \eta^{\mu\sigma}}$$

$$M^{\mu\rho\sigma} = F^{\mu\nu}\left(x^\sigma \partial^\rho A_\nu + \delta^\sigma_\nu A^\rho\right) + \frac{1}{4}\eta^{\mu\sigma} x^\rho F_{\lambda\delta}F^{\lambda\delta}$$
$$- F^{\mu\nu}\left(x^\rho \partial^\sigma A_\nu + \delta^\rho_\nu A^\sigma\right) - \frac{1}{4}\eta^{\mu\rho} x^\sigma F_{\lambda\delta}F^{\lambda\delta}$$

Onde usamos a antisimetria de $\omega_{\rho\sigma}$ na definição de $M^{\mu\rho\sigma}$.

Quando usamos as equações de Euler-Lagrange temos que a variação da ação é nula para qualquer transformação. Logo temos a conservação do tensor momento angular.

$$\partial_\mu M^{\mu\rho\sigma} = 0$$

Note no entanto que $M^{\mu\rho\sigma}$ não é invariante de gauge. Podemos no entanto adicionar a ele o termo

$$\Delta M^{\mu\rho\sigma} \equiv \partial_\nu\left(F^{\mu\nu}x^\rho A^\sigma - F^{\mu\nu}x^\sigma A^\rho\right)$$

Pois

$$\partial_\mu \Delta M^{\mu\rho\sigma} = \partial_\mu \Big\{ \partial_\nu F^{\mu\nu} x^\rho A^\sigma + F^{\mu\nu}\delta^\rho_\nu A^\sigma + F^{\mu\nu}x^\rho \partial_\nu A^\sigma$$
$$- \partial_\nu F^{\mu\nu} x^\sigma A^\rho - F^{\mu\nu}\delta^\sigma_\nu A^\rho - F^{\mu\nu}x^\sigma \partial_\nu A^\rho \Big]$$

$$= \cancelto{1}{\partial_\mu\partial_\nu F^{\mu\nu}} x^\rho A^\sigma + \cancelto{EL}{\partial_\nu F^{\mu\nu}} \delta^\rho_\mu A^\sigma + \cancelto{EL}{\partial_\nu F^{\mu\nu}} x^\rho \partial_\mu A^\sigma$$
$$+ \cancelto{EL}{\partial_\mu F^{\mu\rho}} A^\sigma + F^{\mu\rho}\partial_\mu A^\sigma + \cancelto{EL}{\partial_\mu F^{\mu\nu}} x^\rho \partial_\nu A^\sigma + F^{\mu\nu}\delta^\rho_\mu \partial_\nu A^\sigma + F^{\mu\nu}\cancelto{0}{x^\rho \partial_\mu\partial_\nu A^\sigma}$$
$$- \cancelto{1}{\partial_\mu\partial_\nu F^{\mu\nu}} x^\sigma A^\rho - \cancelto{EL}{\partial_\nu F^{\mu\nu}} \delta^\sigma_\mu A^\rho - \cancelto{EL}{\partial_\nu F^{\mu\nu}} x^\sigma \partial_\mu A^\rho$$
$$- \cancelto{EL}{\partial_\mu F^{\mu\sigma}} A^\rho - F^{\mu\sigma}\partial_\mu A^\rho - \cancelto{EL}{\partial_\mu F^{\mu\nu}} x^\sigma \partial_\nu A^\rho - F^{\mu\nu}\delta^\sigma_\mu \partial_\nu A^\rho - F^{\mu\nu}\cancelto{0}{x^\sigma \partial_\mu\partial_\nu A^\rho}$$

$$= F^{\mu\rho}\cancel{\partial_\mu A^\sigma} + F^{\mu\nu}\cancel{\delta^\rho_\mu \partial_\nu A^\sigma} - F^{\mu\sigma}\cancel{\partial_\mu A^\rho} - F^{\mu\nu}\cancel{\delta^\sigma_\mu \partial_\nu A^\rho}$$

e daí

$$\partial_\mu \Delta M^{\mu\rho\sigma} = 0$$

Além disso

$$\int d^3x\, \Delta M^{0\rho\sigma} = \int d^3x\, \partial_\nu \left(F^{0\nu} x^\rho A^\sigma - F^{0\nu} x^\sigma A^\rho \right)$$

$$= \int d^3x\, \partial_i \left(F^{0i} x^\rho A^\sigma - F^{0i} x^\sigma A^\rho \right)$$

$$= \int d\Sigma_i\, F^{0i} \left(x^\rho A^\sigma - x^\sigma A^\rho \right)$$

Portanto, se os campos forem a zero no infinito espacial suficientemente rápido, temos que tal integral é nula. Definimos, então o tensor momento angular "improved"

$$\tilde{M}^{\mu\rho\sigma} \equiv M^{\mu\rho\sigma} + \Delta M^{\mu\rho\sigma}$$

e daí

$$\begin{aligned}
\tilde{M}^{\mu\rho\sigma} = \; & F^{\mu\nu}\left(\underline{x^\sigma \partial^\rho A_\nu} + \cancel{\delta^\sigma_\nu A^\rho}\right) + \frac{1}{4}\eta^{\mu\sigma} x^\rho F_{\lambda\delta}F^{\lambda\delta} \\
& - F^{\mu\nu}\left(\underline{x^\rho \partial^\sigma A_\nu} + \cancel{\delta^\rho_\nu A^\sigma}\right) - \underline{\frac{1}{4}\eta^{\mu\rho} x^\sigma F_{\lambda\delta}F^{\lambda\delta}} \\
& + \cancel{\partial_\nu F^{\mu\nu}}\, x^\rho A^\sigma + F^{\mu\nu}\cancel{\delta^\rho_\nu} A^\sigma + \underline{F^{\mu\nu} x^\rho \partial_\nu A^\sigma} \\
& - \cancel{\partial_\nu F^{\mu\nu}}\, x^\sigma A^\rho - F^{\mu\nu}\cancel{\delta^\sigma_\nu} A^\rho - \underline{F^{\mu\nu} x^\sigma \partial_\nu A^\rho}
\end{aligned}$$

e daí

$$\tilde{M}^{\mu\rho\sigma} = x^\sigma \left\{ F^{\mu\nu}(\partial^\rho A_\nu - \partial_\nu A^\rho) - \frac{1}{4}\eta^{\mu\rho} F_{\lambda\delta}F^{\lambda\delta} \right\}$$

$$- x^\rho \left\{ F^{\mu\nu}(\partial^\sigma A_\nu - \partial_\nu A^\sigma) - \frac{1}{4}\eta^{\mu\sigma} F_{\lambda\delta}F^{\lambda\delta} \right\}$$

$$= - x^\sigma \left\{ F^{\mu\nu} F_\nu{}^\rho + \frac{1}{4}\eta^{\mu\rho} F_{\lambda\delta}F^{\lambda\delta} \right\}$$

$$+ x^\rho \left\{ F^{\mu\nu} F_\nu{}^\sigma + \frac{1}{4}\eta^{\mu\sigma} F_{\lambda\delta}F^{\lambda\delta} \right\}$$

Usando a expressão de $\tilde{T}^{\mu\nu}$ dada na página 140 temos

$$\boxed{\tilde{M}^{\mu\rho\sigma} = x^\rho \tilde{T}^{\mu\sigma} - x^\sigma \tilde{T}^{\mu\rho}}$$

Usando a simetria de $\tilde{T}^{\mu\nu}$ e sua conservação $(\partial_\mu \tilde{T}^{\mu\nu})$ obtemos, que de fato

$$\boxed{\partial_\mu \tilde{M}^{\mu\rho\sigma} = 0}$$

Temos 6 cargas conservadas

$$\boxed{Q^{\rho\sigma} = \int d^3x\, \tilde{M}^{0\rho\sigma}}$$

Estas seis cargas estão associadas às 6 transformações de Lorentz, 3 rotações e 3 boosts.

As 3 associadas às rotações são as componentes do momento angular propriamente dito

$$\boxed{J^i = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk} Q^{jk} = \int d^3x \, \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\tilde{M}^{0jk}}$$

A 3 associadas aos boosts são

$$\boxed{M^i = \int d^3x \, \tilde{M}^{00i}}$$

Utilizando uma estrutura simplética (Parentêses de Poisson) para a teoria de Maxwell estas cargas devem satisfazer a álgebra de Lie do grupo de Lorentz.

Utilizando os mesmos métodos podemos calcular o tensor momento-angular para o campo de Klein-Gordon real e complexo. O resultado é semelhante ao caso do campo de Maxwell. Temos que

$$M^{\mu\rho\sigma} = x^\rho T^{\mu\sigma} - x^\sigma T^{\mu\rho}$$

com $T^{\mu\sigma}$ dados na página 138 para os campos de Klein-Gordon real e complexo

Note que a conservação deste tensor segue da conservação do tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$ e de sua simetria. De fato temos que:

$$
\begin{aligned}
\partial_\mu M^{\mu\rho\sigma} &= \delta^\rho_\mu T^{\mu\sigma} + x^\rho \partial_\mu T^{\mu\sigma} \\
&\quad - \delta^\sigma_\mu T^{\mu\rho} - x^\sigma \partial_\mu T^{\mu\rho} \\
&= T^{\rho\sigma} - T^{\sigma\rho} + x^\rho \partial_\mu T^{\mu\sigma} - x^\sigma \partial_\mu T^{\mu\rho} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

onde usamos $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ e $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$.

O "truque" (devido provavelmente à Gell-Mann) é fazer o parâmetro ε depender das coordenadas do espaço-tempo x^μ.

Como a ação S não é invariante por transformações <u>locais</u>, i.e., ε não constante, temos que a variação da ação (sem usar Euler-Lagrange) será

$$\delta S = \int d^n x \, \partial_\mu \varepsilon \, J^\mu$$

Não temos termos proporcionais a ε pois assumimos que S é invariante por transformações <u>globais</u>.

Integrando por partes e tomando as variações dos campos nulas no infinito, temos que

$$\delta S = -\int d^n x \, \varepsilon \, \partial_\mu J^\mu$$

Mas se usarmos as equações de Euler-Lagrange temos que $\delta S = 0$ para qualquer variação dos campos

Portanto, quando valem as equações de movimento de Euler-Lagrange devemos ter

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

pois ε é arbitrário. Mas isto é uma lei de conservação. De fato, tomando a integral

$$Q = \int d^{n-1}x \; J^0$$

onde a integral é nas coordenadas espaciais x^i, e não na temporal x^0. Portanto

$$\frac{\partial Q}{\partial x^0} = \int d^{n-1}x \; \partial_0 J^0 = -\int d^{n-1}x \; \partial_i J^i$$

$$= \int d^{n-1}x \; \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \int d\vec{\Sigma} \cdot \vec{J}$$

pelo teorema de Gauss. Supondo que a corrente $\vec{J}$ seja nula no infinito espacial, obtemos que Q é constante no tempo $(x^0 \equiv ct)$

$$\frac{dQ}{dt} = 0$$

Este é o teorema de Noether. Para cada simetria <u>global</u> da ação temos uma quantidade conservada.

O exemplo das translações

Vamos considerar translações globais no espaço de Minkowski

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu}$$

onde a^{μ} é um quadri-vetor constante.

Para o teorema de Noether precisamos considerar transformações infinitesimais. E para usar o "truque" do Gell-Mann temos que fazer o parâmetro infinitesimal dependente dos pontos do espaço-tempo. Portanto, temos

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu}(x) \qquad , \qquad \delta x^{\mu} = \varepsilon^{\mu}(x)$$

Antes de mais nada temos que ver como elemento de volume d^4x, na integral da ação, transforma sob tais transformações. Temos

$$dx'^{\mu} = dx^{\mu} + \frac{\partial \varepsilon^{\mu}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu}$$

$$= (\delta^{\mu}_{\nu} + \partial_{\nu}\varepsilon^{\mu}) dx^{\nu}$$

O elemento de volume transforma pelo Jacobiano

$$d^4x' = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| d^4x$$

e

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu + \partial_\nu \varepsilon^\mu$$

O Jacobiano em primeira ordem em ε é

$$\begin{vmatrix} (1+\partial_0\varepsilon^0) & \partial_1\varepsilon^0 & \partial_2\varepsilon^0 & \partial_3\varepsilon^0 \\ \partial_0\varepsilon^1 & (1+\partial_1\varepsilon^1) & \partial_2\varepsilon^1 & \partial_3\varepsilon^1 \\ \partial_0\varepsilon^2 & \partial_1\varepsilon^2 & (1+\partial_2\varepsilon^2) & \partial_3\varepsilon^2 \\ \partial_0\varepsilon^3 & \partial_1\varepsilon^3 & \partial_2\varepsilon^3 & (1+\partial_3\varepsilon^3) \end{vmatrix}$$

e daí

$$\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| = \partial_\mu \varepsilon^\mu + O(\varepsilon^2)$$

Por outro lado temos que

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} = \frac{\partial(x'^\nu - \varepsilon^\nu)}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

$$= \left(\delta^\nu_\mu - \frac{\partial \varepsilon^\nu}{\partial x'^\mu}\right)\frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

Mas $\quad \frac{\partial \varepsilon^\nu}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial \varepsilon^\nu}{\partial x^\mu} + O(\varepsilon^2) \quad$ e daí

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \left(\delta^\nu_\mu - \partial_\mu \varepsilon^\nu\right)\frac{\partial}{\partial x^\nu} + O(\varepsilon^2)$$

Todos os campos, independentemente de seus spins, são invariantes por translação

Campo escalar $\quad \phi'(x') = \phi(x)$

" vetorial $\quad A'_\mu(x') = A_\mu(x)$

" espinorial $\quad \psi'(x') = \psi(x)$

etc.

Portanto, se tivermos uma Lagrangiana, que depende dos campos e suas primeiras derivadas, i.e.

$$S = \int d^4x \, \mathcal{L}(\Phi_r, \partial\Phi_r)$$

onde Φ_r denota qualquer tipo de campo temos:

$$\delta\Phi_r = 0$$

$$\delta\partial_\mu\Phi_r = -\partial_\mu\varepsilon^\nu\partial_\nu\Phi_r$$

e daí

$$\delta S = \int \delta(d^4x)\,\mathcal{L} + \int d^4x \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\Phi_r}\delta\partial_\mu\Phi_r + \int d^4x \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Phi_r}\delta\Phi_r$$

$$= \int d^4x \left(\partial_\mu\varepsilon^\mu\mathcal{L} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\Phi_r}\partial_\mu\varepsilon^\nu\partial_\nu\Phi_r\right)$$

$$= \int d^4x\, \partial_\mu\varepsilon^\nu\left(\delta^\mu_\nu\mathcal{L} - \frac{\delta\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\Phi_r}\partial_\nu\Phi_r\right)$$

Definimos

$$\boxed{T^\mu{}_\nu \equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \Phi_r} \partial_\nu \Phi_r - \delta^\mu_\nu \mathcal{L}}$$

(geral)

e portanto

$$\delta S = - \int d^4x \; \partial_\mu \varepsilon^\nu T^\mu{}_\nu$$

Integrando por partes e usando o fato que a transformação vai a zero no infinito, temos

$$\delta S = - \int d^4x \; \varepsilon^\nu \partial_\mu T^\mu{}_\nu$$

Quando valem as equações de Euler-Lagrange a variação da ação deve ser nula para qualquer ε^ν. Logo devemos ter

$$\partial_\mu T^\mu{}_\nu = 0$$

$T^\mu{}_\nu$ é o tensor energia-momento, e ele é conservado.

Para o caso do campo de Klein Gordon real, com um potencial, onde

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi \mp V(\phi)$$

~~Daí~~ Temos que

$$\boxed{T^{\mu}{}_{\nu} = \partial^{\mu}\phi\,\partial_{\nu}\phi - \delta^{\mu}_{\nu}\left(\tfrac{1}{2}\partial_{\rho}\phi\,\partial^{\rho}\phi - m^2\phi^2 - V(\phi)\right)} \quad (CGR)$$

Nota que

$$T^{0}{}_{0} = \frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_i\phi)^2 + m^2\phi^2 + V(\phi)$$

e esta é a densidade de ~~m~~ energia, ou Hamiltoniana

Para o campo de Klein-Gordon complexo temos

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi \;\cancel{\qquad} - m\,\phi^*\phi - V(|\phi|^2)$$

e daí

$$T^{\mu}{}_{\nu} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\partial_\nu\phi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi^*}\partial_\nu\phi^* - \delta^{\mu}{}_{\nu}\mathcal{L}$$

$$\boxed{T^{\mu}{}_{\nu} = \partial^{\mu}\phi^*\partial_\nu\phi + \partial^\mu\phi\,\partial_\nu\phi^* - \delta^{\mu}{}_{\nu}\left(\partial_\rho\phi^*\partial^\rho\phi - m^2|\phi|^2 - V(|\phi|^2)\right)}$$

(CGC)

e

$$\cancel{T^{0}{}_{0} = |\partial^0\phi^*|}$$

$$T^{0}{}_{0} = |\partial_0\phi|^2 + |\partial_i\phi|^2 + m^2|\phi|^2 + V(|\phi|^2)$$

que novamente é a densidade de energia.

Para o campo de Maxwell temos

$$S = -\frac{1}{4}\int d^4x\, F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

e daí

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu A_\nu} = -\frac{1}{2}F^{\rho\sigma}\frac{\delta F_{\rho\sigma}}{\delta \partial_\mu A_\nu} = -\frac{1}{2}F^{\rho\sigma}\left(\delta^\mu_\rho \delta^\nu_\sigma - \delta^\mu_\sigma \delta^\nu_\rho\right)$$

$$= -F^{\mu\nu}$$

Logo

$$T^\mu{}_\nu = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu A_\rho}\partial_\nu A_\rho - \delta^\mu_\nu \mathcal{L}$$

$$= -F^{\mu\rho}\partial_\nu A_\rho + \frac{1}{4}\delta^\mu_\nu F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$$

Portanto

$$\boxed{T^\mu{}_\nu = -F^{\mu\rho}\partial_\nu A_\rho + \frac{1}{4}\delta^\mu_\nu F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}} \qquad \text{(Max pre)}$$

e daí

$$T^0{}_0 = -F^{0i}\partial_0 A_i + \frac{1}{4}\left(F^{0i}F_{0i} + F^{i0}F_{i0} + F^{ij}F_{ij}\right)$$

$$= F_{0i}\partial_0 A_i + \frac{1}{2}\left(-F_{0i}F_{0i} + F_{12}^2 + F_{13}^2 + F_{23}^2\right)$$

Nota que os tensores energia momento do campo de Klein-Gordon tanto real quanto complexo, são simétricos,

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \eta^{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\partial_\rho \phi \partial^\rho \phi - m^2\phi^2 - V(\phi)\right)$$

e

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi^* \partial^\nu \phi + \partial^\nu \phi^* \partial^\mu \phi - \eta^{\mu\nu}\left(\partial_\rho \phi^* \partial^\rho \phi - m^2|\phi|^2 - V(|\phi|^2)\right)$$

No entanto o tensor energia-momento de Maxwell não é

$$T^{\mu\nu} = -F^{\mu\rho}\partial^\nu A_\rho + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$$

Nota que tais tensores foram obtidos da ação pelo teorema de Noether, e a ação tem algumas arbitrariedades. Podemos adicionar divergências à Lagrangiana que as eqs. de Euler-Lagrange não mudam.

Portanto, podemos adicionar ao tensor energia-momento tensores que são trivialmente conservados, e que não modificam os valores das cargas.

$$T^{\mu\nu} \to T^{\mu\nu} + \Delta T^{\mu\nu}$$

tal que $\partial_\mu \Delta T^{\mu\nu} = 0$ e $\int d^3x \, \Delta T^{0\mu} = 0$

No caso de Maxwell podemos tomar

$$\Delta T^{\mu\nu} = \partial_\rho (F^{\mu\rho} A^\nu)$$

pois

$$\partial_\mu \Delta T^{\mu\nu} = \partial_\mu \partial_\rho (F^{\mu\rho} A^\nu) =$$

$$= \partial_\mu (\partial_\rho F^{\mu\rho} A^\nu + F^{\mu\rho} \partial_\rho A^\nu)$$

$$= \partial_\mu \partial_\rho F^{\mu\rho} A^\nu + \partial_\rho F^{\mu\rho} \partial_\mu A^\nu + \partial_\mu F^{\mu\rho} \partial_\rho A^\nu +$$
$$+ F^{\mu\rho} \partial_\mu \partial_\rho A^\nu$$

Temos

$$\partial_\mu \partial_\rho F^{\mu\rho} = 0 \ , \ F^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\rho A^\nu = 0$$

por antisimetria, e

$$\partial_\rho F^{\mu\rho} \partial_\mu A^\nu = 0 \quad , \quad \partial_\mu F^{\mu\rho} \partial_\rho A^\nu = 0$$

pelas equações de Maxwell $\quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$

Logo

$$\partial_\mu \Delta T^{\mu\nu} = 0$$

Além disso

$$\int d^3x \, \Delta T^{0\nu} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \, \partial_\rho (F^{0\rho} A^\nu) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \, \partial_i (F^{0i} A^\nu)$$

$$= \int_{\partial \mathbb{R}^3} d\Sigma_i \, F^{0i} A^\nu = 0$$

Portanto, o tensor energia-momento "improved" de Maxwell fica

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \Delta T^{\mu\nu}$$

$$= -F^{\mu\rho}\partial^{\nu}A_{\rho} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} + \partial_{\rho}(F^{\mu\rho}A^{\nu})$$

$$= F^{\mu\rho}(\partial_{\rho}A^{\nu} - \partial^{\nu}A_{\rho}) + \underbrace{\partial_{\rho}F^{\mu\rho}}_{\substack{0 \\ \text{devido às} \\ \text{eqs. de Maxwell}}}A^{\nu} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$$

Logo

$$\boxed{\tilde{T}^{\mu\nu} = F^{\mu\rho}F_{\rho}{}^{\nu} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}}$$

Este tensor é:

- simétrico
- invariante de gauge ($A_{\mu} \to A_{\mu} + \partial_{\mu}\alpha$, $F_{\mu\nu} \to F_{\mu\nu}$)
- e de traço nulo

$$\tilde{T}^{\mu}{}_{\mu} = F^{\mu\rho}F_{\rho\mu} + \frac{1}{4}\delta^{\mu}_{\mu}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$$

$$= -F^{\mu\nu}F_{\mu\rho} + F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = 0$$

Como veremos, a simetria está ligada à conservação do tensor momento-angular, e o traço nulo ligado à invariância conforme da teoria de Maxwell sem fontes.

As cargas conservadas são as componentes do quadrimomento P^μ:

$$P^\mu = \int d^3x \; \tilde{T}^{0\mu}$$

Temos que

$$P^0 = \int d^3x \left(F^{0\rho} F_\rho{}^0 + \frac{1}{4} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \right)$$

$$= \int d^3x \left(F^{0i} F_{i0} + \frac{1}{4} \left(F^{0i} F_{0i} + F^{i0} F_{i0} + F^{ij} F_{ij} \right) \right)$$

$$= \int d^3x \frac{1}{2} \left(F_{0i} F_{0i} + F^{12} F_{12} + F^{13} F_{13} + F_{23} F^{23} \right)$$

$$= \int d^3x \; \frac{1}{2} \left(B_i^2 + E_i^2 \right)$$

e

$$P^i = \int d^3x \; \tilde{T}^{0i} = \int d^3x \; F^{0\rho} F_\rho{}^i = \int d^3x \; F^{0j} F_j{}^i$$

$$= \int d^3x \; F_{0j} F_{ji} = -\int d^3x \; E_j B_k \varepsilon_{jik} =$$

$$= \int d^3x \left(\vec{E} \times \vec{B} \right)_i$$

O exemplo das transformações de Lorentz

As transformações de Lorentz são dadas por

$$dx^{\mu\prime} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, dx^{\nu}$$

onde as matrizes $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ não dependem das coordenadas do espaço-tempo. Portanto, elas são transformações globais.

Expandindo temos (Veja página 120)

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu} + O(\omega^2)$$

onde $\omega^{\mu}{}_{\nu}$ são parâmetros ~~do~~ constantes e pequenos

O campo vetorial A^{μ} transforma como

$$A^{\mu\prime} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} A^{\nu}$$

e portanto

$$\delta A^{\mu} = \omega^{\mu}{}_{\nu} A^{\nu}$$

Logo, $\omega^{\mu}{}_{\nu}$ faz o papel do parâmetro ε do teorema de Noether discutido na seção anterior.

Como vimos na página 121 ω, com os dois índices "embaixo" (ou "em cima") é anti-simétrico, i.e.

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$$

Portanto, como $\mu,\nu = 0,1,2,3$, temos 6 transformações independentes, e se nossa teoria é invariante de Lorentz, temos 6 quantidades conservadas.

Nota que

$$\delta A^\mu = \omega^\mu{}_\nu A^\nu = \omega^{\mu\nu} A_\nu = -\omega^{\nu\mu} A_\nu$$

e portanto

$$\delta A_\mu = -\omega^\nu{}_\mu A_\nu$$

Considere a transformação das coordenadas Cartesianas

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

e $$\Lambda^{-1\rho}{}_\mu x'^\mu = \Lambda^{-1\rho}{}_\mu \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = x^\rho$$

ou $$x^\mu = \Lambda^{-1\mu}{}_\nu x'^\nu$$

~~Ou~~ $\cancel{\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho}}$

Vamos usar o "truque" de fazer os parâmetros da transformação dependerem dos pontos do espaço-tempo. Logo, $\Lambda^\mu{}_\nu$ depende do espaço-tempo. Daí

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} = \frac{\partial(\Lambda^{-1\nu}{}_\rho x'^\rho)}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} =$$

$$= \Lambda^{-1\nu}{}_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \Lambda^{-1\nu}{}_\rho}{\partial x'^\mu} x'^\rho \frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

Mas

$$\Lambda^{-1\nu}{}_\mu = \delta^\nu{}_\mu - \omega^\nu{}_\mu + O(\omega^2)$$

pois

$$\Lambda^\mu{}_\nu \Lambda^{-1\nu}{}_\rho = \left(\delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu + O(\omega^2)\right)\left(\delta^\nu{}_\rho - \omega^\nu{}_\rho + O(\omega^2)\right)$$

$$= \delta^\mu{}_\rho + \omega^\mu{}_\rho - \omega^\mu{}_\rho + O(\omega^2) = \delta^\mu{}_\rho + O(\omega^2)$$

Portanto

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \left(\delta^\nu{}_\mu - \omega^\nu{}_\mu + O(\omega^2)\right)\frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x'^\mu}\left(\delta^\nu_\rho - \omega^\nu{}_\rho + O(\omega^2)\right)\left(x^\rho + \omega^\rho{}_\sigma x^\sigma + O(\omega^2)\right)\frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

Pois $x'^\rho = \Lambda^\rho{}_\sigma x^\sigma = \left(\delta^\rho{}_\sigma + \omega^\rho{}_\sigma + O(\omega^2)\right)x^\sigma$

Ou seja:

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \omega^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \omega^\nu{}_\rho}{\partial x'^\mu} x^\rho \frac{\partial}{\partial x^\nu} + O(\omega^2)$$

Mas

$$\frac{\partial \omega^\nu{}_\rho}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial \omega^\nu{}_\rho}{\partial x^\mu} + O(\omega^2)$$

Daí

$$\delta \partial_\mu = - \omega^\nu{}_\mu \partial_\nu - \frac{\partial \omega^\nu{}_\rho}{\partial x^\mu} x^\rho \partial_\nu$$

$$= - \left(\omega^\nu{}_{\cdot\mu} + \partial_\mu \omega^\nu{}_\rho x^\rho \right) \partial_\nu$$

Considere agora o tensor dos campos

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Temos

$$\delta F_{\mu\nu} = - \left(\omega^\rho{}_\mu + \partial_\mu \omega^\rho{}_\sigma x^\sigma \right) \partial_\rho A_\nu - \partial_\mu \left(\omega^\rho{}_\nu A_\rho \right)$$

$$+ \left(\omega^\rho{}_\nu + \partial_\nu \omega^\rho{}_\sigma x^\sigma \right) \partial_\rho A_\mu + \partial_\nu \left(\omega^\rho{}_\mu A_\rho \right)$$

$$= - \omega^\rho{}_\mu \partial_\rho A_\nu - \omega^\rho{}_\nu \partial_\mu A_\rho + \omega^\rho{}_\nu \partial_\rho A_\mu + \omega^\rho{}_\mu \partial_\nu A_\rho$$

$$- \partial_\mu \omega^\rho{}_\sigma x^\sigma \partial_\rho A_\nu - \partial_\mu \omega^\rho{}_\nu A_\rho$$

$$+ \partial_\nu \omega^\rho{}_\sigma x^\sigma \partial_\rho A_\mu + \partial_\nu \omega^\rho{}_\mu A_\rho$$

$$\delta F_{\mu\nu} = -\omega^\rho{}_\mu F_{\rho\nu} - \omega^\rho{}_\nu F_{\mu\rho}$$
$$-\partial_\mu \omega^\rho{}_\sigma x^\sigma \partial_\rho A_\nu + \partial_\nu \omega^\rho{}_\sigma x^\sigma \partial_\rho A_\mu$$
$$-\left(\partial_\mu \omega^\rho{}_\nu - \partial_\nu \omega^\rho{}_\mu\right) A_\rho$$

~~Since the metric $\eta^{\mu\nu}$ is Lorentz invariant~~

Como a métrica de ~~Lorentz~~ Minkowski é invariante por transformações de Lorentz, temos que a operação de subir e descer índices comuta com a variação δ. Daí

$$\delta F^{\mu\nu} = -\omega^{\rho\mu} F_\rho{}^\nu - \omega^{\rho\nu} F^\mu{}_\rho$$
$$-\partial^\mu \omega^\rho{}_\sigma x^\sigma \partial_\rho A^\nu + \partial^\nu \omega^\rho{}_\sigma x^\sigma \partial_\rho A^\mu$$
$$-\left(\partial^\mu \omega^{\rho\nu} - \partial^\nu \omega^{\rho\mu}\right) A_\rho$$

$$= \omega^\mu{}_\rho F^{\rho\nu} + \omega^\nu{}_\rho F^{\mu\rho}$$
$$-\partial^\mu \omega^\rho{}_\sigma x^\sigma \partial_\rho A^\nu + \partial^\nu \omega^\rho{}_\sigma x^\sigma \partial_\rho A^\mu$$
$$-\left(\partial^\mu \omega^{\rho\nu} - \partial^\nu \omega^{\rho\mu}\right) A_\rho$$

Daí

$$\delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = F_{\mu\nu}\delta F^{\mu\nu} + F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu}$$

$$= F_{\mu\nu}\left(\omega^\mu{}_\rho F^{\rho\nu} + \omega^\nu{}_\rho F^{\mu\rho}\right) - F^{\mu\nu}\left(\omega^\rho{}_\mu F_{\rho\nu} + \omega^\rho{}_\nu F_{\mu\rho}\right)$$
$$+ F_{\mu\nu}\left[-\partial^\mu \omega^\rho{}_\sigma x^\sigma \partial_\rho A^\nu + \partial^\nu \omega^\rho{}_\sigma x^\sigma \partial_\rho A^\mu\right] - 2F_{\mu\nu}\partial^\mu \omega^{\rho\nu} A_\rho$$
$$+ F^{\mu\nu}\left[-\partial_\mu \omega^\rho{}_\sigma x^\sigma \partial_\rho A_\nu + \partial_\nu \omega^\rho{}_\sigma x^\sigma \partial_\rho A_\mu\right] - F^{\mu\nu}\left[\partial_\mu \omega^\rho{}_\nu - \partial_\nu \omega^\rho{}_\mu\right] A_\rho$$

Os termos envolvendo os ω's cancelam ficamos apenas com os termos envolvendo derivadas dos ω's. Ou seja:

$$\delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = -4F_{\mu\nu}[\partial^\mu \omega^\rho{}_\sigma x^\sigma \partial_\rho A^\nu + \partial^\mu \omega^{\rho\nu} A_\rho]$$

Portanto, $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ é realmente invariante quando os ω's são constantes.

Podemos escrever ainda

$$\delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = -4F^{\mu\nu}[\partial_\mu \omega_{\rho\sigma} x^\sigma \partial^\rho A_\nu + \partial_\mu \omega_{\rho\nu} A^\rho]$$

$$= -4\,\partial_\mu \omega_{\rho\sigma} F^{\mu\nu}[x^\sigma \partial^\rho A_\nu + \delta^\sigma_\nu A^\rho]$$

Para transformações globais de Lorentz, onde os ω's são constantes, o elemento de volume é invariante. Mas quando usamos o "truque" de fazê-los dependentes do espaço-tempo, isto não é mais verdade.

Temos

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \to \quad \delta x^\mu = \omega^\mu{}_\nu x^\nu + O(\omega^2)$$

$$x'^\mu = (\delta^\mu{}_\rho + \omega^\mu{}_\rho)x^\rho + O(\omega^2)$$

Portanto

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \left(\delta^\mu{}_\rho + \omega^\mu{}_\rho\right)\delta^\rho{}_\nu + \partial_\nu \omega^\mu{}_\rho\, x^\rho + O(\omega^2)$$

$$= \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu + \partial_\nu \omega^\mu{}_\rho\, x^\rho + O(\omega^2)$$

Logo todos os termos de $\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|$ fora da diagonal são pelo menos de ordem ω. Logo o determinante de $\frac{\partial x'}{\partial x}$ em primeira ordem em ω será o traço de $\frac{\partial x'}{\partial x}$ em primeira ordem (veja página 133 para o análogo das translações)

Daí

$$d^4x' = \left(\omega^\mu{}_\mu + \partial_\mu \omega^\mu{}_\rho x^\rho\right) d^4x + O(\omega^2)$$

Mas da página 143 temos que $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ e

$$\omega^\mu{}_\mu = \eta_{\mu\nu}\,\omega^{\mu\nu} = 0$$

Portanto d^4x é invariante para ω constante, e

$$d^4x' = \partial_\mu \omega^\mu{}_\rho x^\rho\, d^4x + O(\omega^2)$$

A ação de Maxwell é

$$S = -\frac{1}{4}\int d^4x\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

e

$$\delta S = -\frac{1}{4}\int \delta(d^4x)\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\int d^4x\, \delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$$

Usando os resultados anteriores temos:

$$\delta S = \int d^4x \Big[-\frac{1}{4}\partial_\mu \omega^\mu{}_\rho x^\rho F_{\lambda\sigma}F^{\lambda\sigma} +$$

$$+ \partial_\mu \omega_{\rho\sigma} F^{\mu\nu}\{x^\sigma \partial^\rho A_\nu + \delta^\sigma_\nu A^\rho\Big]$$

$$= \int d^4x\, \partial_\mu \omega_{\rho\sigma}\Big\{ F^{\mu\nu}(x^\sigma\partial^\rho A_\nu + \delta^\sigma_\nu A^\rho) + \frac{1}{4}F_{\lambda\delta}F^{\lambda\delta}\eta^{\mu\sigma}x^\rho\Big\}$$

$$= -\frac{1}{2}\int d^4x\, \omega_{\rho\sigma}\partial_\mu M^{\mu\rho\sigma}$$

onde integramos por partes e usamos que as transformações na borda são nulas, e onde definimos

$$\cancel{M^{\mu\rho\sigma} = F^{\mu\nu}(x^\sigma\partial^\rho A_\nu + \delta^\sigma_\nu A^\rho) + \frac{1}{4}x^\rho F^{\lambda}\eta^{\mu\sigma}}$$

$$M^{\mu\rho\sigma} = F^{\mu\nu}\left(x^\sigma \partial^\rho A_\nu + \delta^\sigma_\nu A^\rho\right) + \frac{1}{4}\eta^{\mu\sigma} x^\rho F_{\lambda\delta}F^{\lambda\delta}$$
$$- F^{\mu\nu}\left(x^\rho \partial^\sigma A_\nu + \delta^\rho_\nu A^\sigma\right) - \frac{1}{4}\eta^{\mu\rho} x^\sigma F_{\lambda\delta}F^{\lambda\delta}$$

Onde usamos a antisimetria de $\omega_{\rho\sigma}$ na definição de $M^{\mu\rho\sigma}$.

Quando usamos as equações de Euler-Lagrange temos que a variação da ação é nula para qualquer transformação. Logo temos a conservação do tensor momento angular.

$$\partial_\mu M^{\mu\rho\sigma} = 0$$

Note no entanto que $M^{\mu\rho\sigma}$ não é invariante de gauge. Podemos no entanto adicionar a ele o termo

$$\Delta M^{\mu\rho\sigma} \equiv \partial_\nu\left(F^{\mu\nu} x^\rho A^\sigma - F^{\mu\nu} x^\sigma A^\rho\right)$$

Pois

$$\partial_\mu \Delta M^{\mu\rho\sigma} = \partial_\mu \{ \partial_\nu F^{\mu\nu} x^\rho A^\sigma + F^{\mu\nu}\delta^\rho_\nu A^\sigma + F^{\mu\nu} x^\rho \partial_\nu A^\sigma$$
$$- \partial_\nu F^{\mu\nu} x^\sigma A^\rho - F^{\mu\nu}\delta^\sigma_\nu A^\rho - F^{\mu\nu} x^\sigma \partial_\nu A^\rho \}$$

$$= \partial_\mu\partial_\nu \cancelto{1}{F^{\mu\nu}} x^\rho A^\sigma + \cancelto{\text{EL}}{\partial_\nu F^{\mu\nu}} \delta^\rho_\mu A^\sigma + \cancelto{\text{EL}}{\partial_\nu F^{\mu\nu}} x^\rho \partial_\mu A^\sigma$$
$$+ \cancelto{\text{EL}}{\partial_\mu F^{\mu\rho}} A^\sigma + F^{\mu\rho}\partial_\mu A^\sigma + \cancelto{\text{EL}}{\partial_\mu F^{\mu\nu}} x^\rho \partial_\nu A^\sigma + F^{\mu\nu}\delta^\rho_\mu \partial_\nu A^\sigma + F^{\mu\nu} \cancelto{0}{x^\rho \partial_\mu\partial_\nu A^\sigma}$$
$$- \partial_\mu\partial_\nu \cancelto{1}{F^{\mu\nu}} x^\sigma A^\rho - \cancelto{\text{EL}}{\partial_\nu F^{\mu\nu}} \delta^\sigma_\mu A^\rho - \cancelto{\text{EL}}{\partial_\nu F^{\mu\nu}} x^\sigma \partial_\mu A^\rho$$
$$- \cancelto{\text{EL}}{\partial_\mu F^{\mu\sigma}} A^\rho - F^{\mu\sigma}\partial_\mu A^\rho - \cancelto{\text{EL}}{\partial_\mu F^{\mu\nu}} x^\sigma \partial_\nu A^\rho - F^{\mu\nu}\delta^\sigma_\mu \partial_\nu A^\rho - F^{\mu\nu} \cancelto{0}{x^\sigma \partial_\mu\partial_\nu A^\rho}$$

$$= \overset{1}{\cancel{F^{\mu\rho}\partial_\mu A^\sigma}} + \overset{1}{\cancel{F^{\mu\nu}\delta^\rho_\mu \partial_\nu A^\sigma}} - \overset{2}{\cancel{F^{\mu\sigma}\partial_\mu A^\rho}} - \overset{2}{\cancel{F^{\mu\nu}\delta^\sigma_\mu \partial_\nu A^\rho}}$$

e daí

$$\partial_\mu \Delta M^{\mu\rho\sigma} = 0$$

Além disso

$$\int d^3x\, \Delta M^{0\rho\sigma} = \int d^3x\, \partial_\nu \left(F^{0\nu} x^\rho A^\sigma - F^{0\nu} x^\sigma A^\rho \right)$$

$$= \int d^3x\, \partial_i \left(F^{0i} x^\rho A^\sigma - F^{0i} x^\sigma A^\rho \right)$$

$$= \int d\Sigma_i\, F^{0i} \left(x^\rho A^\sigma - x^\sigma A^\rho \right)$$

Portanto, se os campos forem a zero no infinito espacial suficientemente rápido, temos que tal integral é nula. Definimos, então o tensor momento angular "improved"

$$\tilde{M}^{\mu\rho\sigma} \equiv M^{\mu\rho\sigma} + \Delta M^{\mu\rho\sigma}$$

e daí

$$\begin{aligned}
\tilde{M}^{\mu\rho\sigma} = {} & F^{\mu\nu}\left(\underline{x^\sigma \partial^\rho A_\nu} + \overset{1}{\cancel{\delta^\sigma_\nu A^\rho}}\right) + \frac{1}{4}\eta^{\mu\sigma} x^\rho F_{\lambda\delta}F^{\lambda\delta} \\
& - F^{\mu\nu}\left(\underline{x^\rho \partial^\sigma A_\nu} + \overset{2}{\cancel{\delta^\rho_\nu A^\sigma}}\right) - \frac{1}{4}\eta^{\mu\rho} x^\sigma \underline{F_{\lambda\delta}F^{\lambda\delta}} \\
& + \overset{EL}{\cancel{\partial_\nu F^{\mu\nu}}}\, x^\rho A^\sigma + \overset{2}{\cancel{F^{\mu\nu}\delta^\rho_\nu A^\sigma}} + \underline{F^{\mu\nu} x^\rho \partial_\nu A^\sigma} \\
& - \overset{EL}{\cancel{\partial_\nu F^{\mu\nu}}}\, x^\sigma A^\rho - \overset{1}{\cancel{F^{\mu\nu}\delta^\sigma_\nu A^\rho}} - \underline{F^{\mu\nu} x^\sigma \partial_\nu A^\rho}
\end{aligned}$$

e daí

$$\tilde{M}^{\mu\rho\sigma} = x^\sigma \left\{ F^{\mu\nu}(\partial^\rho A_\nu - \partial_\nu A^\rho) - \frac{1}{4}\eta^{\mu\rho} F_{\lambda\delta}F^{\lambda\delta} \right\}$$

$$- x^\rho \left\{ F^{\mu\nu}(\partial^\sigma A_\nu - \partial_\nu A^\sigma) - \frac{1}{4}\eta^{\mu\sigma} F_{\lambda\delta}F^{\lambda\delta} \right\}$$

$$= - x^\sigma \left\{ F^{\mu\nu} F_\nu{}^\rho + \frac{1}{4}\eta^{\mu\rho} F_{\lambda\delta}F^{\lambda\delta} \right\}$$

$$+ x^\rho \left\{ F^{\mu\nu} F_\nu{}^\sigma + \frac{1}{4}\eta^{\mu\sigma} F_{\lambda\delta}F^{\lambda\delta} \right\}$$

Usando a expressão de $\tilde{T}^{\mu\nu}$ dada na página (140) temos

$$\boxed{\tilde{M}^{\mu\rho\sigma} = x^\rho \tilde{T}^{\mu\sigma} - x^\sigma \tilde{T}^{\mu\rho}}$$

Usando a simetria de $\tilde{T}^{\mu\nu}$ e sua conservação $(\partial_\mu \tilde{T}^{\mu\nu})$ obtemos, que de fato

$$\boxed{\partial_\mu \tilde{M}^{\mu\rho\sigma} = 0}$$

Temos 6 cargas conservadas

$$\boxed{Q^{\rho\sigma} = \int d^3x\, \tilde{M}^{0\rho\sigma}}$$

Estas seis cargas estão associadas às 6 transformações de Lorentz, 3 rotações e 3 boosts.

As 3 associadas às rotações são as componentes do momento angular propriamente dito

$$\boxed{J^i = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk} Q^{jk} = \int d^3x \, \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk} \tilde{M}^{0jk}}$$

A 3 associadas aos boosts são

$$\boxed{M^i = \int d^3x \, \tilde{M}^{00i}}$$

Utilizando uma estrutura simplética (Parentêses de Poisson) para a teoria de Maxwell estas cargas devem satisfazer a álgebra de Lie do grupo de Lorentz.

Utilizando os mesmos métodos podemos calcular o tensor momento-angular para o campo de Klein-Gordon real e complexo. O resultado é semelhante ao caso do campo de Maxwell. Temos que

$$M^{\mu\rho\sigma} = x^\rho T^{\mu\sigma} - x^\sigma T^{\mu\rho}$$

com $T^{\mu\sigma}$ dados na página 138 para os campos de Klein-Gordon real e complexo

Note que a conservação deste tensor segue da conservação do tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$ e de sua simetria.

De fato temos que:

$$
\begin{aligned}
\partial_\mu M^{\mu\rho\sigma} &= \delta^\rho_\mu T^{\mu\sigma} + x^\rho \partial_\mu T^{\mu\sigma} \\
&\quad - \delta^\sigma_\mu T^{\mu\rho} - x^\sigma \partial_\mu T^{\mu\rho} \\
&= T^{\rho\sigma} - T^{\sigma\rho} + x^\rho \partial_\mu T^{\mu\sigma} - x^\sigma \partial_\mu T^{\mu\rho} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

onde usamos $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ e $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$.