Simulado 5 - SMA304

Questão 1. Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformação linear tal que

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

em que B é a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Então

a ( ) $V(1) = [(1,1,1)]$ e $V(-2) = [(1,1,0),(0,1,1)]$ e T é diagonalizável.

b ( ) $V(-2) = [(1,-1,0)]$, $V(0) = [(1,-1,0)]$ e $V(1) = [(-1,1,-1)]$ e T é diagonalizável.

c ( ) $V(1) = [(-1,1,-1)]$ e $V(-2) = [(1,-1,0)]$ e T não é diagonalizável.

d (x) $V(1) = [(-1,1,-1)]$ e $V(-2) = [(1,-1,0),(0,-1,1)]$ e T é diagonalizável.

e ( ) $V(1) = [(-1,1,-1)]$ e $V(-2) = [(0,-1,1)]$ e T não é diagonalizável.

Solução: Polinômio característico de T:

$$\begin{aligned}
p_T(\lambda) = \det([T]_B - \lambda \mathrm{Id}) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 3 \\ -3 & -5-\lambda & -3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)(-5-\lambda)(1-\lambda) - 27 - 27 - 9(-5-\lambda) + 9(1-\lambda) + 9(1-\lambda) \\
&= (1-\lambda)(-5-\lambda)(1-\lambda) - 27 - 27 + 45 + 9\lambda + 18(1-\lambda) \\
&= (1-\lambda)(-5-\lambda)(1-\lambda) - 9 + 9\lambda + 18(1-\lambda) \\
&= (1-\lambda)(-5-\lambda)(1-\lambda) - 9(1-\lambda) + 18(1-\lambda) \\
&= (1-\lambda)(-5-\lambda)(1-\lambda) + 9(1-\lambda) \\
&= (1-\lambda)\left((-5-\lambda)(1-\lambda) + 9\right) \\
&= (1-\lambda)(-5 + 5\lambda - \lambda + \lambda^2 + 9) \\
&= (1-\lambda)(4 + 4\lambda + \lambda^2) = (1-\lambda)(2+\lambda)^2
\end{aligned}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de T se, e somente se, $p_T(\lambda) = 0$ se, somente se,

$$\lambda = 1 \quad \text{e} \quad \lambda = -2.$$

Logo, a multiplicidade algébrica $m_a(1)$ do autovalor 1 é 1 e a multiplicidade algébrica $m_a(-2)$ do autovalor -2 é 2.

Determinemos o autoespaço $V(1)$ associado a $\lambda = 1$.

$u \in N(T - 1\mathrm{Id})$ se, e somente se, $[T - \mathrm{Id}]_B (u)_B = 0$. Suponha que $(u)_B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Então

$$[T - \mathrm{Id}]_B (u)_B = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -3 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{aligned} 3b + 3c &= 0 \\ -3a - 6b - 3c &= 0 \\ 3a + 3b &= 0 \end{aligned} \right. \iff \left\{ \begin{aligned} c &= -b \\ a &= -b. \end{aligned} \right.$$

Como B é base canônica de $\mathbb{R}^3$ temos que $u = (-b, b, -b) = b(-1,1,-1)$, em que $b \in \mathbb{R}$. Portanto, $V(1) = [(-1,1,-1)]$ e a multiplicidade geométrica $m_g(1)$ do autovalor 1 é 1.

Determinemos o autoespaço $V(-2)$ associado a $\lambda=-2$.

$u \in N(T+2\mathrm{Id})$ se, e somente se, $[T+2\mathrm{Id}]_B(u)_B=0$. Suponha que $(u)_B=\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}$. Então

$$[T+2\mathrm{Id}]_B(u)_B=0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3\\ -3 & -3 & -3\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{r} 3a+3b+3c=0\\ -3a-3b-3c=0\\ 3a+3b+3c=0\end{array}\right. \Longleftrightarrow 3a+3b+3c=0 \Longleftrightarrow b=-a-c.$$

Como B é base canônica de $\mathbb{R}^3$ temos que $u=(a,-a-c,c)=a(1,-1,0),+c(0,-1,1)$, em que $a,c\in\mathbb{R}$. Portanto, $V(-2)=[(1,-1,0),(0,-1,1)]$ e a multiplicidade geométrica $m_g(-2)$ do autovalor -2 é 2.

A teoria implica que a sequência $C=((-1,1,-1),(1,-1,0),(0,-1,1))$ é LI. Como a dimensão de $\mathbb{R}^3$ é 3 segue que C é uma base de $\mathbb{R}^3$. Como cada vetor de C é um autovetor de T, segue que T é diagonalizável.

Questão 2. Observação: Esta questão é uma aplicação da teoria de autovalor/autovetor e diagonalização. Considere a matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ -2 & 4\end{pmatrix}.$$

Então A^{2021} é igual a

a ( ) $\begin{pmatrix} 1 & 1\\ -2^{2021} & 2^{4042}\end{pmatrix}$.

b ( ) $\begin{pmatrix} -2^{2021}+3^{2022} & 2^{2021}-3^{2021}\\ -2^{2021}+2\cdot 3^{2022} & 2^{2021}-2\cdot 3^{2022}\end{pmatrix}$.

c ( ) $\begin{pmatrix} 2^{2021} & 0\\ 0 & 3^{2021}\end{pmatrix}$.

d ( ) $\begin{pmatrix} -2^{2021}-3^{2021} & -2^{2021}+3^{2021}\\ 2^{2021}-2\cdot 3^{2021} & 2^{2021}-2\cdot 3^{2021}\end{pmatrix}$.

e (x) $\begin{pmatrix} 2^{2022}-3^{2021} & -2^{2021}+3^{2021}\\ 2^{2022}-2\cdot 3^{2021} & -2^{2021}+2\cdot 3^{2021}\end{pmatrix}$.

Solução: Seja $T\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ uma transformação linear tal que $[T]_B=A$, em que B é a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Polinômio característico de T:

$$\begin{aligned} p_T(\lambda)=\det([T]_B-\lambda\mathrm{Id}) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1\\ -2 & 4-\lambda\end{vmatrix}\\ &=(1-\lambda)(4-\lambda)+2=4-\lambda-4\lambda+\lambda^2+2=\lambda^2-5\lambda+6\\ &=(2-\lambda)(3-\lambda).\end{aligned}$$

$\lambda\in\mathbb{R}$ é um autovalor de T se, e somente se, $p_T(\lambda)=0$ se, somente se, $\lambda=2$ e $\lambda=3$. Determinemos o autoespaço $V(2)$ associado a $\lambda=2$.

$u\in N(T-2\mathrm{Id})$ se, e somente se, $[T-2\mathrm{Id}]_B(u)_B=0$. Suponha que $(u)_B=\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix}$. Então

$$[T-2\mathrm{Id}]_B(u)_B=0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1\\ -2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{r} -a+b=0\\ -2a+2b=0\end{array}\right. \Longleftrightarrow a=b.$$

Como B é base canônica de $\mathbb{R}^2$ temos que $u = (a, a) = a(1, 1)$, em que $a \in \mathbb{R}$. Portanto, $V(2) = [(1, 1)]$.

Determinemos o autoespaço $V(3)$ associado a $\lambda = 3$.

$u \in N(T - 3\mathrm{Id})$ se, e somente se, $[T - 3\mathrm{Id}]_B(u)_B = 0$. Suponha que $(u)_B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Então

$$[T - 3\mathrm{Id}]_B(u)_B = 0 \iff \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -2a + b = 0 \\ -2a + b = 0 \end{cases} \iff b = 2a.$$

Como B é base canônica de $\mathbb{R}^2$ temos que $u = (a, 2a) = a(1, 2)$, em que $a \in \mathbb{R}$. Portanto, $V(3) = [(1, 2)]$.

A teoria implica que a sequência $C = ((1, 1), (1, 2))$ é LI. Como a dimensão de $\mathbb{R}^2$ é 23 segue que C é uma base de $\mathbb{R}^2 3$. Como cada vetor de C é um autovetor de T, segue que T é diagonalizável e

$$[T]_C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

A teoria de matrizes de uma transformação linear implica que

$$[T]_B = M_B^C [T]_C M_C^B = M_B^C [T]_C (M_B^C)^{-1},$$

em que M_B^C é a matriz de mudança da base B para a base C. Note que

$$(M_B^C)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Defina

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

. Logo, $A = PDP^{-1}$. Recorde que $A^n = PD^nP^{-1}$ e que $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$, para $n \in \mathbb{N}$. Portanto, se $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 3^n \\ 2^n & 2 \cdot 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2^n - 3^n & -2^n + 3^n \\ 2 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n & -2^n + 2 \cdot 3^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & -2^n + 3^n \\ 2^{n+1} - 2 \cdot 3^n & -2^n + 2 \cdot 3^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Em particular, se $n = 2021$ obtemos

$$A^{2021} = \begin{pmatrix} 2^{2022} - 3^{2021} & -2^{2021} + 3^{2021} \\ 2^{2022} - 2 \cdot 3^{2021} & -2^{2021} + 2 \cdot 3^{2021} \end{pmatrix}.$$

Questão 3. Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Considere, também, as seguintes afirmações:

(I) A é diagonalizável.

(II) B é diagonalizável.

(III) C não é diagonalizável.

(IV) D é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

Assinale a alternativa correta. Na sua resolução, justifique claramente sua escolha.

a ( ) Somente uma afirmação é verdadeira

b (x) Todas são verdadeiras.

c ( ) Todas são falsas.

d ( ) Somente duas afirmações são verdadeiras.

e ( ) Somente três afirmações são verdadeiras.

Solução:

(I) $p(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \cdots = (\lambda - 1)(\lambda - 4)$ é polinômio característico de A. Então A é diagonalizável, já que todas as suas raízes são simples, ou equivalentemente, já que as multiplicidades algébricas dos seus autovalores são 1 (e, portanto, igual às multiplicidades geométricas destes autovalores).

(II) $p(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \cdots = (\lambda - 5)(\lambda + 2)$ é polinômio característico de B. Então B é diagonalizável, já que todas as suas raízes são simples, ou equivalentemente, já que as multiplicidades algébricas dos seus autovalores são 1 (e, portanto, igual às multiplicidades geométricas destes autovalores).

(III) $p(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \cdots = (\lambda - 4)^2$ é polinômio característico de C. Então C será diagonalizável se e somente se $\dim V(4) = 2$. Mas $(B - 4I) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ o que implica que $\dim Im(B - 4I) = 1$. Logo, $\dim N(B - 4I) = 1$ (pelo Teorema do Núcleo e da Imagem). Assim, $\dim V(4) = \dim N(B - 4I) = 1 \neq 2$, ou seja, C não é diagonalizável.

(IV) $p(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -5 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \cdots = (\lambda - i)(\lambda + i)$ é polinômio característico de D. Então D é diagonalizável sobre C, já que todas as suas raízes (complexas) são simples, ou equivalentemente, já que as multiplicidades algébricas dos seus autovalores são 1 (e, portanto, igual às multiplicidades geométricas destes autovalores).

Questão 4. Sejam $u = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$ e $v = (a, 1/\sqrt{2}, -b)$ vetores em $\mathbb{R}^3$ e consideremos nesse espaço vetorial o produto interno usual. Então é incorreto afirmar que:

a ( ) u e v são ortogonais para $a = 1$ e $b = 1$.

b ( ) v é um vetor com norma igual a 1 se, e somente se, $a^2 + b^2 = 1/2$.

c ( ) Existe uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ contendo u e v sempre que $a = b$.

d ( ) $\{(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}), (1/2, 1/\sqrt{2}, -1/2), (-1, \sqrt{2}, 1)\}$ é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

e (x) $\{(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}), (1/2, 1/\sqrt{2}, -1/2), (-1, \sqrt{2}, 1)\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

Solução: Vejamos que u e v são vetores ortogonais se, e somente se,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}a - \frac{1}{\sqrt{2}}b = 0,$$

o que ocorre se, e somente se, $a = b$. Assim, as letras a e c são verdadeiras. Além disso, temos que

$$||(a, 1/\sqrt{2}, -b)|| = \sqrt{a^2 + 1/2 + b^2},$$

o que mostra que o item b está correto. Por último, é possível verificarmos que o conjunto apresentado nas letras d e e é um conjunto ortogonal, mas não é ortonormal, pois $||(-1, \sqrt{2}, 1)|| = 2 \neq 1$. Portanto a afirmativa da letra e é falsa. ■

Questão 5. Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e seja $||\cdot||$ a norma associada a esse produto interno. Sobre V, fazemos as seguintes afirmações:

1. Se $u, v \in V$ são vetores ortogonais, então $||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$.
2. Se $||u|| = 1$, $||v|| = 2$ e $||u + v|| = 1$, então $||u - v|| = 3$.

Então, é verdade que:

a (x) As duas afirmações são verdadeiras.

b ( ) As duas afirmações são falsas.

c ( ) Apenas a primeira afirmação é verdadeira.

d ( ) Apenas a segunda afirmação é verdadeira.

Solução:

1. Como u e v são vetores ortogonais, temos que $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} ||u + v||^2 &= \langle u + v, u + v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle \\ &= ||u||^2 + ||v||^2. \end{aligned}$$

2. Pela identidade do paralelogramo temos que

$$||u + v||^2 + ||u - v||^2 = 2(||u||^2 + ||v||^2),$$

de modo que com os dados fornecidos, temos que $||u - v||^2 = 2(1^2 + 2^2) - 1^2 = 9$, e assim $||u - v|| = 3$.

Questão 6. Considere o espaço vetorial $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ munido do produto interno usual:

$$\langle A, B\rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22},$$

para $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Seja W o subespaço de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dado por:

$$W = \left[\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}\right].$$

Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Se a projeção ortogonal de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sobre W for igual a $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, poderemos afirmar que:

a ( ) $a - d - 1 = 0$ e $b - c - 1 = 0$.

b ( ) $a + d - 1 = 0$ e $b + c - 1 = 0$.

c (x) $a + d - 1 = 0$ e $b - c + 1 = 0$.

d ( ) $a + d + 1 = 0$ e $b + c - 1 = 0$.

e ( ) $a + d + 1 = 0$ e $b - c + 1 = 0$.

Solução: Defina

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Temos

$$\begin{aligned}
\langle A_1, A_2\rangle &= 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot(-1) + 1\cdot 0 = 0 \\
\langle A_1, A_1\rangle &= 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 1\cdot 1 = 2 \\
\langle A_2, A_2\rangle &= 0\cdot 0 + 1\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) + 0\cdot 0 = 2.
\end{aligned}$$

Logo, A_1 e A_2 são ortogonais e $\|A_1\| = \sqrt{2}$ e $\|A_2\| = \sqrt{2}$. Portanto,

$$B = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

é uma base ortonormal de W. Seja $\operatorname{proj}_W A$ a projeção ortogonal de A sobre W. Segue que

$$\begin{aligned}
\operatorname{proj}_W A &= \langle A, A_1\rangle A_1 + \langle A, A_2\rangle A_2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(a+d)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}(b-c)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+d & b-c \\ c-b & a+d \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\operatorname{proj}_W A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} &\iff \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+d & b-c \\ c-b & a+d \end{pmatrix} \\
&\iff a + d = 1 \text{ e } b - c = -1 \iff a + d - 1 = 0 \text{ e } b - c + 1 = 0.
\end{aligned}$$

Questão 7. Consideremos os operadores lineares $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$S(x, y) = (-y, x),$$

e $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$T(x, y, z) = (x, x + y, x + y + z).$$

Então, podemos afirmar que:

a ( ) S e T são isometrias.

b ( ) S e T não são isometrias.

c (x) Apenas S é uma isometria.

d ( ) Apenas T é uma isometria.

Solução: Vejamos que para todos $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, temos que

$$\langle S(x_1, y_1), S(x_2, y_2)\rangle = \langle(-y_1, x_1), (-y_2, x_2)\rangle = (-y_1)(-y_2)+x_1x_2 = x_1x_2+y_1y_2 = \langle(x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle.$$

Portanto, S é uma isometria. Por outro lado, se considerarmos por exemplo $(1, 1, 1)$ e $(0, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$, vemos que

$$\langle T(1, 1, 1), T(0, 1, 1)\rangle = \langle(1, 2, 3), (0, 1, 2)\rangle = 2 + 6 = 8 \neq 2 = 1 + 1 = \langle(1, 1, 1), (0, 1, 1)\rangle.$$

Portanto T não é uma isometria. ■

Questão 8. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ com produto interno e seja $T : V \to V$ um operador linear autoadjunto. Considere as seguintes afirmações:

(I) Se λ e μ são autovalores distintos de T e u, v, w são vetores de V tais que $V(\lambda) = [u, v]$ e $V(\mu) = [w]$, então $\langle w, u\rangle = \langle w, v\rangle = 0$.

(II) Quaisquer dois autovetores de T distintos são ortogonais.

(III) Se $\langle T(u), u\rangle > 0$, para todo vetor não nulo $u \in V$, então os autovalores de T são todos positivos.

Assinale a alternativa correta. Na sua resolução, justifique claramente sua escolha.

a ( ) (I) é verdadeira e (II) e (III) são falsas.

b ( ) (II) é verdadeira e (I) e (III) são falsas.

c ( ) (III) é verdadeira e (I) e (II) são falsas.

d ( ) (I) e (II) são verdadeiras e (III) é falsa.

e (x) (I) e (III) são verdadeiras e (II) é falsa.

f ( ) (II) e (III) são verdadeiras e (I) é falsa.

g ( ) (I), (II) e (III) são verdadeiras.

h ( ) (I), (II) e (III) são falsas.

Solução: (I) Recordemos o seguinte resultado da teoria de operadores autoadjuntos:

Teorema 1. *Seja V um espaço euclidiano de dimensão finita e seja $T : V \to V$ um operador linear autoadjunto. Se λ_1 e λ_2 são autovalores distintos de T, os autovetores correspem quentes v_1 e v_2 são ortogonais.*

Como μ é um autovalor de T e $V(\mu) = [w]$, segue que $w \neq 0$ e w é um autovetor de T associado ao autovalor μ.

Suponha que $u = 0$. Logo, $\langle w, u\rangle = 0$. Como λ é um autovalor de T e $V(\lambda) = [u, v]$, segue que $v \neq 0$ e v é um autovetor de T associado ao autovalor λ. Logo, Teorema 1 implica que w e v são ortogonais. Portanto, também obtemos que $\langle w, v\rangle = 0$.

Suponha que $u \neq 0$. Neste caso, u é um autovetor de T associado ao autovalor λ. Segue do Teorema 1 que w e u são ortogonais e w e v são ortogonais. Portanto, $\langle w, u\rangle = \langle w, v\rangle = 0$.

A afirmação (I) é verdadeira.

(II) Observamos que o Teorema 1 não garante nada sobre a ortogonalidade dos autovetores associados a um mesmo autovalor. Por exemplo, se $T\colon V \to V$ um operador linear autoadjunto, em que V é um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ e λ é um autovalor de T, então existe um vetor $u \in V$ com $u \neq 0$ tal que u é um autovetor de T associado ao autovalor λ. Segue que $2u$ também é um autovetor de T associado ao autovalor λ. Note que u e $2u$ são autovetores distintos e

$$\langle u, 2u\rangle = 2\langle u, u\rangle > 0.$$

Portanto, u e $2u$ não ortogonais.

Para um exemplo de operador autoadjunto nas condições acima considere em $\mathbb{R}^2$ o produto interno usual e seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear dado por

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

em que B é a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Como B é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ e $[T]_B$ é uma matriz simétrica segue que T é um operador autoadjunto. É fácil mostrar que $\lambda = 5$ é um autovalor de T associado ao autovetor $u = (1, 0)$. Portanto, u e $2u$ são autovetores distintos e u e $2u$ não ortogonais.

A afirmação (II) é falsa.

(III) Seja Se λ um autovalor de T. Logo, existe um vetor $v \in V$ não nulo tal que $T(v) = \lambda v$. Em particular temos

$$\langle T(v), v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \lambda\langle v, v\rangle$$

e portanto

$$\lambda\langle v, v\rangle > 0. \tag{1}$$

Como $v \neq 0$, segue que $\langle v, v\rangle > 0$. Portanto, (1) implica que $\lambda > 0$.

A afirmação (III) é verdadeira.

Questão 9. Uma matriz B é equivalente a uma matriz A, se B puder ser obtida de A por uma sequência de operações de linha e coluna. Alternativamente, B é equivalente a A, se houver matrizes não singulares P e Q tais que $B = PAQ$. Dito isso, considere as seguintes matrizes de Jordan (nas entradas em que não há nada, considera-se o valor 0):

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & & & & & & \\ 0 & 4 & & & & & & \\ & & 4 & 1 & & & & \\ & & 0 & 4 & & & & \\ & & & & 4 & & & \\ & & & & & 2 & 1 & \\ & & & & & 0 & 2 & \\ & & & & & & & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & & & & & \\ 0 & 4 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & 4 & & & & & \\ & & & 4 & 1 & & & \\ & & & 0 & 4 & & & \\ & & & & & 2 & 1 & 0 \\ & & & & & 0 & 2 & 1 \\ & & & & & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Considere, também, as seguintes afirmações:

(I) As matrizes A e B são equivalentes.

(II) As matrizes A e B têm os mesmos polinômios característicos.

(III) A multiplicidade geométrica do autovalor $\lambda = 2$ é 2 para a matriz A.

(IV) A multiplicidade geométrica do autovalor $\lambda = 4$ é 3 para a matriz B.

Assinale a alternativa correta. Na sua resolução, justifique claramente sua escolha.

a ( ) Somente (I) é falsa.

b ( ) (I) e (II) são falsas.

c (x) Todas são verdadeiras.

d ( ) Todas são falsas.

e ( ) Somente (III) e (IV) são verdadeiras.

Solução:

(I) As matrizes A e B são equivalentes. De fato. Seja L_i a linha i da matriz B

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & & & & & \\ 0 & 4 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & 4 & & & & & \\ & & & 4 & 1 & & & \\ & & & 0 & 4 & & & \\ & & & & & 2 & 1 & 0 \\ & & & & & 0 & 2 & 1 \\ & & & & & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Troque L_2 por $L_2 - \frac{1}{4}L_3$, troque L_4 por $L_4 - \frac{1}{4}L_5$ e troque L_7 por $L_7 - \frac{1}{2}L_8$ e obtenha

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & & & & & \\ 0 & 4 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 4 & & & & & \\ & & & 4 & 0 & & & \\ & & & 0 & 4 & & & \\ & & & & & 2 & 1 & 0 \\ & & & & & 0 & 2 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Troque L_3 por $L_3 + \frac{1}{4}L_4$ e obtenha

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & & & & & \\ 0 & 4 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 4 & 1 & & & & \\ & & & 4 & 0 & & & \\ & & & 0 & 4 & & & \\ & & & & & 2 & 1 & 0 \\ & & & & & 0 & 2 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = A.$$

(II) Temos $p_A(\lambda) = p_B(\lambda) = (\lambda - 2)^3(\lambda - 4)^5$, pois, de acordo com as matrizes dadas, a multiplicidade algébrica do autovalor $\lambda = 2$ é 3 e a multiplicidade algébrica do autovalor $\lambda = 4$ é 5, ou seja, existem 3 $2's$ e 5 $4's$ nas diagonais de cada uma das matrizes A e B.

(III) A multiplicidade geométrica do autovalor $\lambda = 2$ na matriz A é 2, pois há 2 blocos de Jordan associados a este autovalor na matriz A.

(IV) A multiplicidade geométrica do autovalor $\lambda = 4$ na matriz B é 2, pois há 2 blocos de Jordan associados a este autovalor na matriz B.

Questão 10. Considere as seguintes matrizes de Jordan (nas entradas em que não há nada, considera-se o valor 0):

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & & & \\ 0 & 5 & & & \\ & & 5 & & \\ & & & -1 & 1 \\ & & & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & & \\ 0 & 5 & 1 & & \\ 0 & 0 & 5 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & & \\ 0 & 5 & 1 & & \\ 0 & 0 & 5 & & \\ & & & -1 & 1 \\ & & & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 5 & & & & \\ & 5 & & & \\ & & 5 & & \\ & & & -1 & 1 \\ & & & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 5 & 1 & & & \\ 0 & 5 & & & \\ & & 5 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & -1 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 5 & & & & \\ & 5 & & & \\ & & 5 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & -1 \end{bmatrix}$$

Considere, também, as seguintes afirmações:

(I) Todas as matrizes acima têm o mesmo polinômio característico que é $p(t) = (t-5)^3(t+1)^2$.

(II) As multiplicidades algébricas e geométricas de cada um dos autovalores da matriz F são iguais.

(III) As multiplicidades algébricas e geométricas de cada um dos autovalores das matrizes B, D e E são iguais.

(IV) As multiplicidades geométricas de cada um dos autovalores das matrizes A e C são estritamente menores do que suas respectivas multiplicidades algébricas.

Assinale a alternativa correta. Na sua resolução, justifique claramente sua escolha.

a ( ) (I) e (III) são verdadeiras.

b ( ) Todas são verdadeiras.

c ( ) Todas são falsas.

d ( ) Somente (II) e (IV) são verdadeiras.

e (x) Somente (I), (II) e (IV) são verdadeiras.

Solução:

(I) $p(t) = (t-5)^3(t+1)^2$ é polinômio característico de todas as matrizes, pois todas têm 3 números 5 e 2 números -1, ou seja, a multiplicidade algébrica do autovalor $t = 5$ é 3 e a multiplicidade algébrica do autovalor $t = -1$ é 2 para cada uma das matrizes.

(II) F é uma matriz diagonal e, por isso, as multiplicidades algébricas e geométricas coincidem.

(III) Na matriz B, por exemplo, a multiplicidade geométrica do autovalor $t = 5$ é 1 que é menor do que sua multiplicidade algébrica que é 3.

(IV) Na matriz A, a multiplicidade geométrica do autovalor $t = 5$ é 2 (pois há 2 blocos de Jordan para o autovalor $t = 5$) que é menor do que sua multiplicidade algébrica que é 3. Ainda na matriz A, a multiplicidade geométrica do autovalor $t = -1$ é 1 (pois há 1 bloco de Jordan para o autovalor $t = -1$) que é menor do que sua multiplicidade algébrica que é 2. Um raciocínio análogo pode ser feito para a matriz C.