Aula 16
Cálculo diferencial

Vamos estudar funções definidas em subconj. de $\mathbb{R}^n$.

$\mathbb{R}^n$ espaço com produto interno

$$\langle u,v\rangle = u\circ v = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \qquad u,v\in\mathbb{R}^n$$

$$u=(u_1,\dots,u_n)$$

Norma $\|u\| = \sqrt{u\cdot u}$

$$v=(v_1,\dots,v_n)$$

Conjuntos abertos e fechados em $\mathbb{R}^n$

O análogo natural ao intervalo fechado $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$ é o retângulo fechado

$$[a,b]\times[c,b] = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[a,b] \text{ e } y\in[c,d]\}.$$

Em $\mathbb{R}^n$ consideramos $[a_1,b_1]\times\dots\times[a_n,b_n]$

dado por $\{x \in \mathbb{R}^n : x_i \in [a_i, b_i] \quad i = 1, \dots, n\}$.

De maneira geral se $A \subset \mathbb{R}^n$ e $B \subset \mathbb{R}^m$,

$$A \times B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m} : x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

O conj. $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ é chamado retângulo aberto.

$A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto se $\forall\, x \in A$ existe um retângulo $R \subset A$ tal que $x \in R$.

$B \subset \mathbb{R}^n$ é fechado se $\mathbb{R}^n / B$ é aberto (se seu complementar é aberto).

Exemplos:

1) O conjunto vazio e o $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ são abertos e fechados (e são os únicos conj. com tais propriedades em $\mathbb{R}^n$).

2) Um ponto em $\mathbb{R}^n$ é fechado.

Proposição: i) Seja $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ uma família de subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$. Então $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ é aberto.

ii) Seja $\{F_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ uma família de subconj. fechados de $\mathbb{R}^n$. Então $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} F_i$ também é fechado.

iii) A intersecção finita de abertos é aberta.

iv) A união finita de fechados é fechada.

dem. (i) Seja $x \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$. Então $x \in A_i$ para algum $i \in \mathbb{N}$. Como A_i é aberto existe retângulo aberto R em $\mathbb{R}^n$ tal que $x \in R \subset A_i \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$. Logo a união de abertos é aberta.

(ii) Segue de (i) e do fato que o complementar da intersecção é a união dos complementares, ie.,

$$\mathbb{R}^n - \bigcap_{i\in\mathbb{N}} F_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (\mathbb{R}^n - F_i).$$

dem. $x \in \mathbb{R}^n - \bigcap F_i \longleftrightarrow x \notin \bigcap F_i \ \forall i \in \mathbb{N}$

$\longleftrightarrow x \notin F_i$ para algum $i \longleftrightarrow x \in \mathbb{R}^n - F_i$ para algum $i \longleftrightarrow x \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (\mathbb{R}^n - F_i)$. ////

Com efeito, F_i fechado $\rightsquigarrow$ $\mathbb{R}_n - F_i$ aberto. Daí

$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{R}_n - F_i$ é aberto $\rightsquigarrow$ $\mathbb{R}_n - \bigcap_{i\in\mathbb{N}} F_i$ é aberto e

assim, $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} F_i$ é fechado.

(iii) e (iv) deixamos como exercício. ////

Exemplos:

3) A união finita de pontos em $\mathbb{R}^n$ é fechada.
O que podemos dizer da união enumerável?

OBS: Veja que o retângulo fechado é de fato um conj. fechado.

Proposição: Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um subconj. e $x \in \mathbb{R}^n$ um ponto. Então uma das três possibilidades abaixo ocorre:

(a) $\exists\, R \subset \mathbb{R}^n$ retângulo aberto tal que $x \in R \subset A$.

(b) $\exists\, R \subset \mathbb{R}^n$ retângulo aberto tal que $x \in R \subset \mathbb{R}^n / A$.

(c) Se $R \subset \mathbb{R}^n$ é um retângulo aberto qualquer com $x \in R$, então $R \cap A$ e $R \cap \{\mathbb{R}^n - A\}$ são diferentes de vazio.

Os pontos que satisfazem (a) constituem o interior de A. Aquelas que satisfazem (b) o exterior e os que satisfazem (c) são chamados pontos do contorno de A.

OBS: Veja que o interior e exterior de A são abertos. Daí, o contorno de A é fechado.

Compactos Uma coleção Θ de conjuntos abertos é chamada cobertura de A se $A \subset \bigcup_{B \in \Theta} B$.

Exemplos 1) $B_n = (n-1, n+1)$ $n \in \mathbb{N}$

é uma cobertura de $\mathbb{R}$.

2) $B_a = \left(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}\right)$ $a \in \mathbb{R}$ também é

cobertura de $\mathbb{R}$.

Note que um subconjunto finito das coberturas acima não cobrem $\mathbb{R}$ (na verdade, não cobrem qualquer subconjunto ilimitado de $\mathbb{R}$).

Dizemos que $C \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se qualquer cobertura Θ de C possui um subconjunto finito que cobre C (possui uma subcobertura de Θ que cobre C).

Exemplos.

1) $\mathbb{R}$ não é compacto.

2) $\mathbb{R}^n$ não é compacto (verifique).

3) Subconj. finitos de $\mathbb{R}^n$ são compactos.

Teorema (Heine-Borel) O intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$, com $a, b \in \mathbb{R}$, é compacto.

dem. Seja $\mathcal{E} = \{ x \in [a,b] : [a,x]$ possui número finito de elementos de Θ que o cobrem$\}$.

Observe que $\mathcal{E}$ é limitado superiormente por b. Logo $\exists\, \alpha = \sup \mathcal{E}$. Vamos mostrar que $\sup \mathcal{E} = b$.

Inicialmente observamos que $\alpha \in \mathcal{E}$. De fato, como $\alpha = \sup \mathcal{E}$, existe $B \in \Theta$ tal que $\alpha \in B$. Mais, existe $x \in B$, $x \leq \alpha$, tal que $[a,x]$ possui uma subcobertura finita Θ' de Θ. Então $\Theta' \cup B$ cobre $[a,\alpha] \leadsto \alpha \in \mathcal{E}$.

Suponha agora que $\alpha < b$. Como $\alpha \in B$, existe $x' \in (\alpha, b)$ tal que $[\alpha, x'] \subset B$ (B aberto). Daí

x' também pertence a $\mathcal{E}$, pois $[a,x'] = [a,\alpha] \cup [\alpha, x']$ possui subcobertura finita $\mathcal{O}' \cup B$ de $\mathcal{O}$. $\not\leftarrow$

Contradição pois $\alpha = \sup \mathcal{E}$ e $x' > \alpha$.

$\therefore \quad \alpha = b.$ ▪

Em seguida veremos que o produto cartesiano de compactos é compacto.

Lema. Sejam $x \in \mathbb{R}^m$ e $B \subset \mathbb{R}^n$. Então $\{x\} \times B$ também é compacto. Além disso, se $\mathcal{O}$ é cobertura de $\{x\} \times B$ existe $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto com $x \in U$ tal que $U \times B$ é coberto por um nº finito de elementos de $\mathcal{O}$.

Corolário: Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ e $B \subset \mathbb{R}^m$ compactos. Então $A \times B$ também é compacto.

Referência: M. Spivak, Calculus on Manifolds, Addison-Wesley Publ. Comp. 1995.

Prova do lema. Seja $\mathcal{C}$ cobertura de $\{x\} \times B$. Em particular, $\mathcal{C}$ também é cobertura de B compacto. Logo possui subcobertura $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ finita que o cobre. Seja $O \in \mathcal{C}$ aberto tal que $O \supset \{(x, b)\}$ para algum $b \in B$. Então $\mathcal{C}' \cup O \subset \mathcal{C}$ é subcobertura finita de $\{x\} \times B$ $\leadsto$ $\{x\} \times B$ é compacto. Mais ainda, com O é aberto, existe retângulo aberto $R = R_1 \times R_2 \subset O$ com $x \in R_1$ e $b \in R_2$. Daí, $R_1 \times B$ também é coberto por $\mathcal{C}' \cup O$. ▨

Prova do corolário. Seja $\mathcal{C}$ cobertura qualquer de $A \times B$ com A e B compactos. Seja $a \in A$ um elemento fixo. Como $\{a\} \times B \subset A \times B$ é compacto, existe $\mathcal{C}_a \subset \mathcal{C}$ subcobertura finita de $U_a \times B$ para algum U_a aberto. Veja que $\{U_a : a \in A\}$ cobrem A. $\exists\ U_{a_1}, \ldots, U_{a_n}$ cobertura finita de A e $\mathcal{C}' = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{C}_{a_i}$ cobertura finita de $A \times B$. Logo $A \times B$ é compacto. ▨

Exercícios: 1) Mostre que $A_1 \times \dots \times A_k$ é compacto se cada $A_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ é compacto. Em particular, o retângulo fechado em $\mathbb{R}^k$ é compacto.

2) Seja $F \subset \mathbb{R}^n$ fechado. Mostre que

$$F = \operatorname{Int}(F) \cup \partial F.$$

3) Denotamos por $B_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < \delta\}$ a bola de raio δ centrada em $a \in \mathbb{R}^n$.

a) Verifique que $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto se só se para cada $a \in A$ existe $\delta_a > 0$ tal que $B_{\delta_a}(a) \subset A$.

b) Prove que $a \in \partial A$ se só se $\forall \delta > 0$ $B_\delta(a) \cap A \neq \phi$.

4) Mostre que todo compacto de $\mathbb{R}^n$ é fechado e limitado.