Universidade de São Paulo
ICMC - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Professora: Regilene Delazari dos Santos Oliveira
Alunos:

Álgebra Linear - SMA0304
Atividade Bônus 11

07/12/2023

Questão 1. Considerando-se o produto interno usual em $\mathbb{R}^4$, faça o que se pede:

1. Determine a norma dos vetores $u = (4, 2, -1, 1, 9)$ e $v = (2, 4, 5, 3, 7)$ e calcule a distância entre eles.
2. Encontre uma base ortonormal para o subespaço $V = [(-1, -1, 1, 0), (-1, 1, 0, 1)]$.

Solução: Para o item 1, relembre que a distância entre os vetores com relação ao produto interno usual é o módulo do vetor $u - v$. Temos então que:

$$\|u\| = \left(4^2 + 2^2 + (-1)^2 + 1^2 + 9^2\right)^{1/2} = \sqrt{103}.$$
$$\|v\| = \left(2^2 + 4^2 + 5^2 + 3^2 + 7^2\right)^{1/2} = \sqrt{103}$$
$$\|u - v\| = \|(2, -2, -6, -2, 2)\| = (4 + 4 + 36 + 4 + 4)^{1/2} = \sqrt{52}$$

Para o item 2, denotemos $u = (-1, -1, 1, 0)$ e $v = (-1, 1, 0, 1)$. Então:

$$\langle u, v\rangle = (-1)(-1) + (-1)(1) + 0 = 0.$$

Assim, os vetores são ortogonais e é suficiente normalizá-los para obter a base normal. Como $\|u\| = \|v\| = \sqrt{3}$, então a base desejada é formada por:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}u, \frac{1}{\sqrt{3}}v\right\}.$$

■

Questão 2. No espaço de matrizes quadradas podemos definir os seguintes produtos internos: dadas $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n$ definimos:

- $\langle A, B\rangle_1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$; ou
- $\langle A, B\rangle_2 = \mathrm{tr}(B^T A)$

Note que o primeiro produto é a soma dos produtos dos elementos de mesma posição. Relembre que tr é a soma dos elementos da diagonal principal.

Para as matrizes A e B abaixo, calcule as normas e o ângulo entre elas com relação a ambos os produtos internos:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solução:

Relembre que o ângulo θ entre dois vetores u, v em um espaço com produto interno $\langle .,. \rangle$ e norma associada $\|.\|$ é dado por:

$$\cos\theta = \frac{\langle v, u\rangle}{\|u\|\|v\|}.$$

Assim precisamos calcular o produto interno entre as matrizes e também as normas.

Vamos denotar as normas associadas por $\|.\|_1$ e $\|.\|_2$, respectivamente. Com relação à primeira norma, temos que:

$$\begin{aligned}
\langle A, B\rangle_1 &= 2.1 + 1.3 + 3.1 = 8 \\
\|A\|_1 &= \left((-1)^2 + 1^2 + 2^2 + 1^2 + (-1)^2 + 3^2 + 4^2\right)^{1/2} = \sqrt{33} \\
\|B\|_1 &= \left(1^2 + 2^2 + (-1)^2 + 3^2 + 1^2\right)^{1/2} = 4 \\
\cos\theta &= \frac{8}{4\sqrt{33}} = \frac{2}{\sqrt{33}},
\end{aligned}$$

logo, $\theta = \arccos \frac{2}{\sqrt{33}}$. Com relação à segunda norma, teremos:

$$\begin{aligned}
\langle A, B\rangle_2 &= \operatorname{tr}(B^T A) = 0 + 3 + 5 = 8 \\
\|A\|_2 &= \left(\operatorname{tr}(A^T A)\right)^{1/2} = (2 + 10 + 21)^{1/2} = \sqrt{33} \\
\|B\|_2 &= \left(\operatorname{tr}(B^T B)\right)^{1/2} = (4 + 2 + 10)^{1/2} = 4. \\
\cos\theta &= \frac{8}{4\sqrt{33}} = \frac{2}{\sqrt{33}}.
\end{aligned}$$

Logo, $\theta = \text{arcos}\left(\frac{2}{\sqrt{\sqrt{33}}}\right)$. Observe que os valores mudam de acordo com a norma considerada.

■

Questão 3. No espaço de polinômios $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ temos os seguintes produtos internos: sejam

$$\begin{aligned}
f &= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\
g &= b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0
\end{aligned}$$

Definimos:

- $\langle f, g\rangle_1 = \sum_{i=0}^{3} a_i b_i$; ou
- $\langle f, g\rangle_2 = \int_0^1 f(x)g(x)dx$.

1. Calcule as normas e o ângulo entre os polinômios $p(x) = 2x - 1$ e $q(x) = 6x^2 - 6x + 1$ com relação aos dois produtos internos.
2. Seja $p(x) = x + 1$. Encontre um polinômio $q(x)$ tal que $\langle q(x), p(x)\rangle_1 = 0$ mas $\langle q(x), p(x)\rangle_2 \neq 0$.

Solução:

Como na questão anterior, denotaremos as normas por $\|.\|_1$ e $\|.\|_2$. Com relação à primeira norma, teremos que:

$$\begin{aligned} \langle p, q\rangle_1 &= 0.0 + 0.6 + 2.(-6) + 1.(-1) = -13 \\ \|p\|_1 &= \left(2^2 + (-1)^2\right)^{1/2} = \sqrt{5} \\ \|q\|_1 &= \left(6^2 + (-6)^2 + 1^2\right)^{1/2} = \sqrt{73} \\ \cos\theta &= \frac{-13}{\sqrt{5.73}} = \frac{-13}{\sqrt{365}} \end{aligned}$$

Com relação à segunda norma, temos que:

$$\begin{aligned} \langle p, q\rangle_2 &= \int_0^1 p(x).q(x)dx = \int_0^1 (12x^3 - 18x^2 + 8x - 1) = 3 - 6 + 4 - 1 = 0. \\ \|p\|_2 &= \left(\int_0^1 p(x)^2 dx\right)^{1/2} = \left(\int_0^1 (4x^2 - 4x + 1)dx\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \|q\|_2 &= \left(\int_0^1 q(x)^2\right)^{1/2} = \left(\int_0^1 3(6x^4 - 72x^3 + 48x^2 - 12x + 1)dx\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \cos\theta &= \frac{0}{\sqrt{15}} = 0. \end{aligned}$$

Logo, $\theta = \frac{\pi}{2}$. Para o segundo item, note que o primeiro produto interno é exatamente o produto Euclideano se vermos cada polinômio como um vetor em $\mathbb{R}^4$ onde os coeficientes são as coordenadas. Assim, como as coordenadas de $p(x) = x + 1$ relacionadas aos monômios x^3 e x^4 são nulas, podemos tomar $q(x)$ com tais coordenadas diferentes de zero e as demais iguais a zero. Por exemplo, $q(x) = x^4 + x^3$. Então:

$$\langle p(x), q(x)\rangle_1 = 0.1 + 0.1 + 1.0 + 1.0 = 0.$$

Por outro lado:

$$\langle p(x), q(x)\rangle_2 = \int_0^1 (x^4 + x^3)(x + 1)dx = \int_0^1 (x^5 + 2x^4 + x^3)dx = \frac{49}{60} \neq 0.$$

■