Oficinas de Demonstração - MAT1514

Lista de Exercícios - 2023/2

Caros(as) estudantes,

Os exercícios a seguir são adaptações dos enunciados que vocês enviaram. Elaborar questões de Matemática (problemas/exercícios) não é uma tarefa fácil, e por isso parabenizamos a todas e todos que se esforçaram para cumprir essa atividade. **Pedimos que cada um resolva individualmente um exercício dessa lista que não seja parecido com aquele(s) que seu grupo enviou**. Esperamos que gostem dos exercícios!

Agradecemos pelo engajamento nas atividades que propusemos neste semestre e ficamos à disposição para conversar mais pelos corredores ou por e-mail.

Divirtam-se!

Equipe das Oficinas de Demonstração

Exercícios

Exercício 1: Considere um número inteiro positivo a de pelo menos três algarismos e o número b formado pelos três últimos algarismos de a. Por exemplo, se a for igual a 6703587, então b é igual a 587.
i) Mostre que se a é um múltiplo de 8, então b é um múltiplo de 8.
ii) Mostre que se b é um múltiplo de 8, então a é um múltiplo de 8.
iii) Para um n natural qualquer, o que se pode dizer no caso em que a é um múltiplo de 2^n?

Exercício 2: Mostre que se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função par derivável, então sua derivada $f'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função ímpar, isto é,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = -\lim_{h\to 0} \frac{f(-x+h)-f(-x)}{h}.$$

Exercício 3: Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função ímpar. Considere os pontos $A = (x_0, f(x_0))$ e $B = (-x_0, f(-x_0))$ em coordenadas cartesianas e a reta r definida pela relação $x = y$ no plano cartesiano. Mostre que as distâncias $d(A, r)$ e $d(B, r)$ são iguais.

Exercício 4: Mostre que existe uma função $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para qualquer função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a função $g \cdot f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $(g \cdot f)(x) = g(x) \cdot f(x)$ é uma função ímpar.
(Resumidamente: Mostre que existe g tal que o produto $g \cdot f$ é ímpar para toda f.)

Exercício 5: A imagem a seguir é composta por três quadrados. Mostre que a soma dos ângulos verde, vermelho e azul é $90°$.