PROVA 2 – Fisica I para o Curso de Ciências Moleculares - 2S 2023 – Prof. Caetano R. Miranda

NOME: **#USP:**

MAY THE FORCE BE WITH YOU.

INSTRUÇÕES:

i) ***Descreva e justifique todos os passos durante a resolução dos problemas. Não serão plenamente computadas apenas respostas diretas.***

ii) ***Essa é uma prova sem consulta aos colegas ou qualquer material de apoio, além do indicado.***

iii) ***O tempo da prova é de 2 horas. Indique seu nome e #USP em todas as páginas.***

Problema 1

No átomo de hidrogênio, a distância media entre o elétron e o próton e de aproximadamente 0,5 Å. A massa do próton é m_p=1,67x10^{-27} kg e a do elétron, m_e= 9,1x10^{-31}, sendo iguais a e=1,6x10^{-19} C, o módulo das cargas das duas partículas.

a) Calcule a razão entre as atrações coulombiana e gravitacional das duas partículas no átomo. (1.0 ponto)

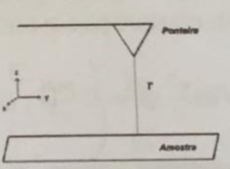
b) A que distância entre o elétron e o próton sua atração coulombiana se tornaria igual a atração gravitacional existente entre eles no átomo? (1 ponto)

c) Compare o resultado com a distância Terra-Lua (3,84 x 10^8 m), interpretando o resultado. (1 ponto)

Problema 2

Na visita ao SIRIUS, a T33 do CCM foi apresentada ao microscópio de força atômica, um aparato bastante utilizado em Nanotecnologia. Este instrumento permite medir a força de interação entre a superfície da ponteira e a superfície de uma amostra em escala nanométrica. Dentre os modelos usados para descrever essa interação está uma variante do potencial Lennard-Jones, conhecido como potencial 9-6, cuja forma funcional é dada abaixo:

$$U(r) = A\left[\left(\frac{B}{r}\right)^9 - \left(\frac{B}{r}\right)^6\right]$$



,onde r é a distância entre a ponteira e a amostra, A e B são parâmetros do potencial, com unidades de energia e distância, respectivamente, com A > 0 e B > 0.

a) Obtenha a expressão da força de interação entre a ponteira e a superfície em função de sua separação em termos dos parâmetros A e B. (0.5 ponto)

b) Determine o valor da distância de equilíbrio entre a ponteira e a amostra (0.5 ponto)

c) Determine a energia de interação na condição de equilíbrio (0.5 ponto)

d) Identifique as regiões (faixas de valores de r) em que as interações são atrativas e/ou repulsivas e discuta sobre as condições de equilíbrio. (0.5 ponto)

e) Determine as distâncias onde: i) essa força de interação é zero e ii) a força tem seu valor mínimo. (1.0 ponto)

f) Partindo com a ponteira da posição de força mínima, qual é o trabalho realizado para afastarmos completamente a ponteira da amostra (isto é, leva-la a uma distância infinita)? Este trabalho é conhecido como componente de capilaridade de adesão. (1 ponto)

PROVA 2 – Física I para o Curso de Ciências Moleculares - 2S 2023 – Prof. Caetano R. Miranda

NOME: **#USP:**

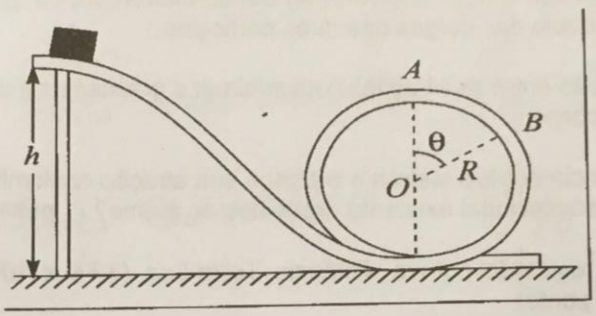
Problema 3

Similar à demonstração realizada em aula, um carrinho desce de uma altura h para dar a volta no "loop" de raio R indicado na figura abaixo.

(a) Desprezando o atrito do carrinho com o trilho, qual é o menor valor h1 de h necessário para permitir ao carrinho dar a volta toda? (1 ponto)

(b) Se R < h < h1, o carrinho cai do trilho num ponto B, quando ainda falta percorrer mais um ângulo θ para chegar até o topo A (Fig.). Calcule θ. (1.5 pontos)

(c) Que acontece com o carrinho para h < R? (0.5 ponto)



Problema Bônus (1 ponto) – O que é energia? Quais soluções você proporia para mitigar o desafio global em energia?

Formulário:

v=dr/dt a=dv/dt

Para aceleração **a** constante, em t = 0, **r= r**$_0$ e **v= v**$_0$: i) **v=v**$_0$ **+at** e ii) **r=r**$_0$ **+v**$_0$ **t+½a.t**^{2}

$$\vec{F} = m\frac{v^2}{r},\ \vec{F} = G\frac{mM}{r^2},\ G = 6{,}67 \times 10^{-11}\frac{N\cdot m^2}{kg^2} \qquad \vec{F} = k\frac{qQ}{r^2}\hat{r}$$

Constantes físicas: g = 9.8 m/s^2. Use o valor aproximado g = 10 m/s^2 quando solicitado.

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}\cdot d\vec{l}$$

$$\mathbf{F} = -\nabla U \qquad \nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

Derivadas importantes

$f(t)$	$df(t)/dt$
$a\,f(t)+b\,g(t)$	$a\,df(t)/dt + b\,dg(t)/dt$
$a - const.$	0
t^n	nt^{n-1}
$\sin\omega t$	$\omega\cos\omega t$
$\cos\omega t$	$-\omega\sin\omega t$
$e^{\lambda t}$	$\lambda e^{\lambda t}$
$\ln\lambda t$	t^{-1}

BOA SORTE !

CCM - PROVA II NOV /2023

Questão 1:

Info: i) distância e-p ⇒ 0.5 Å; $r = 0,5 \times 10^{-10}$ m

ii) $m_p = 1.67 \times 10^{-27}$ Kg

iii) $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ Kg

iv) carga $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C

Razão entre as atrações coulombiana e gravitacional

Conhecendo: Força Gravitacional $F_{Gep} = \frac{G \cdot m_e \cdot m_p}{r^2}$

Força Coulombiana $F_{Cep} = \frac{K e^2}{r^2}$

a)

$$F_{Gep} = \frac{G \cdot m_e \cdot m_p}{r^2} = \frac{6,67 \times 10^{-11} \times 9,1 \times 10^{-31} \times 1,67 \times 10^{-27}}{(0.5 \times 10^{-10})^2} = 4,054 \times 10^{-47}\ N$$

$$F_{Cep} = \frac{K \cdot e^2}{r^2} = \frac{9 \times 10^9 \times (1,6 \times 10^{-19})^2}{(0.5 \times 10^{-10})^2} = 9,216 \times 10^{-8}\ N$$

$$\frac{F_{Cep}}{F_{Gep}} = \frac{9.216 \times 10^{-8}\ N}{4,054 \times 10^{-47}} = \boxed{2,27 \times 10^{39}}$$

F_G correto 0.4
F_C correto 0.4
Razão 0.2

b) d entre e e p onde a atração coulombiana se torna igual a gravitacional.

$$\underbrace{\frac{G \cdot m_e \cdot m_p}{r^2}}_{4.054 \times 10^{-47}} = \frac{K e^2}{d^2} \Rightarrow 4,054 \times 10^{-47} = \frac{9 \times 10^9 (1.6 \times 10^{-19})^2}{d^2}$$

$$d = \sqrt{\frac{9 \times 10^{9} \cdot (1,6 \times 10^{-19})^2}{4.054 \times 10^{-47}}} = \boxed{2,38 \times 10^9\ m}$$

→ solução (0.5)

→ resultado numérico (0.5)

c) Comparação Terra–Lua ($3,84 \times 10^8$ m)

$$\frac{d}{d_{\text{Terra-lua}}} = \frac{2.38 \times 10^9}{3.84 \times 10^8} = 6,2 \implies \underline{d = 6,2 \times d_{TL}}$$

interpretação ⇒ • comentar sobre a escala

• relevância do termo gravitacional em escala atômica

- 0.4 (valor numérico)
- 0.6 (interpretação)

$$U(r) = A\left[\left(\frac{B}{r}\right)^9 - \left(\frac{B}{r}\right)^6\right]$$

a) A força, aqui unidimensional, em r.

$$F(r) = -\frac{dU}{dr} = -\frac{d}{dr}\left(A.\left[\left(\frac{B}{r}\right)^9 - \left(\frac{B}{r}\right)^6\right]\right)$$

$$= A.\left[9.\frac{B^9}{r^{10}} - 6.\frac{B^6}{r^7}\right]$$

$$= AB^6\left[\frac{9B^3}{r^{10}} - \frac{6}{r^7}\right]$$

b) Valor da distância de equilíbrio:

equilíbrio é qdo as forças se anulam.

$$F(r_{eq}) = A\left[\frac{9.B^9}{r_{eq}^{10}} - 6\frac{B^6}{r_{eq}^7}\right] = 0$$

$$\frac{\cancel{9}^{3}\, B^{\cancel{9}^{3}}}{r_{eq}^{\cancel{10}^{3}}} = \frac{\cancel{6}^{2}\, B^{\cancel{6}}}{r_{eq}^{\cancel{7}}}$$

$$\boxed{r_{eq} = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} B} \Rightarrow \frac{B}{r_{eq}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/3}$$

c) Energia de interação na condição de equilíbrio
$U(r_{eq})$

$$U(r_{eq}) = A\left[\left(\frac{B}{r_{eq}}\right)^9 - \left(\frac{B}{r_{eq}}\right)^6\right] = A\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right] = A\,\frac{4}{9}\left[\frac{2}{3} - 1\right]$$

$$\boxed{= -\frac{4}{27}A} < 0$$

d) do item a, temos:

i) $F(r > r_{eq}) < 0$ (força atrativa)

ii) $F(0 < r < r_{eq}) > 0$ (força repulsiva)

$$\lim_{r \to +\infty} (U(r)) = 0^-$$

$$\lim_{r \to 0^+} U(r) = +\infty$$

Em ~~...~~ $r = r_{eq}$, temos um único pto que se anula

$0 \leq r < +\infty$

Equilibrio ESTÁVEL

Outra forma $\Rightarrow$ p/ $r = r_{eq}$ analisar o sinal da 2ª derivada de $U(r)$ no pto de equilibrio

$$\left[\frac{d^2U}{dr^2}\right]_{r=r_{eq}} = \left\{\frac{d}{dz}\left[A\left(-9\frac{B^9}{r^{10}} + 6\frac{B^6}{r^7}\right)\right.\right.$$

$$= A \cdot \left[\frac{90B^9}{r^{11}} - 42\frac{B^6}{r^8}\right]_{r_{eq}}$$

$$= 18 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{8/3} \frac{A}{B^2} > 0$$

e)

i) força de interação é zero:

seria na posição de equilíbrio

$$r = r_{eq} = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} B$$

ii) valor de mínimo

$$\left(\frac{dF}{dr}\right)_{r=r_{min}} = 0 = -A\left[90\frac{B^9}{r^{11}} - 42\frac{B^6}{r^8}\right]_{r=r_{min}}$$

$$90\frac{B^9}{r_m^{11}} = \frac{42 B^6}{r_m^8}$$

existe apenas um ponto de extremo

$$r_m = \left(\frac{15}{7}\right)^{1/3} B > r_{eq}$$

que deve ~~ser~~ corresponde a um mínimo de $F(r)$, análogo a $U(r)$

$$\lim_{r \to +\infty} F(r) = 0^-$$

$$\lim_{r \to 0^+} F(r) = +\infty$$

f) trabalho

$$W = \int_{r_m}^{\infty} F_{ext} \cdot dr$$

$$= -\int_{r_m}^{\infty} F(r)\,dr$$

$$= -A\int_{r_m}^{+\infty}\left[\frac{9B^9}{r^{10}} - 6\frac{B^6}{r^7}\right]dr$$

$$= -9AB^9\int_{r_m}^{\infty} r^{-10}\cdot dr + 6AB^6\int_{r_m}^{+\infty} r^{-7}\,dr$$

$$= AB^9 r^{-9}\Big|_{r_{min}}^{\infty} - AB^6 \cdot r^{-6}\Big|_{r_m}^{\infty}$$

$$= A\cdot\left[-\left(\frac{B}{r_{min}}\right)^9 + \left(\frac{B}{r_m}\right)^6\right]$$

$$= A\left[-\left(\frac{7}{15}\right)^3 + \left(\frac{7}{15}\right)^2\right]$$

$$= A\left(\frac{7}{15}\right)^2\left[-\frac{7}{15}+1\right]$$

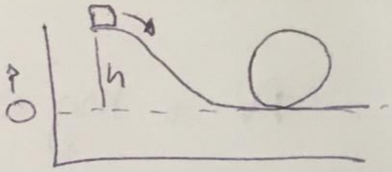
$$= \boxed{A\cdot\left(\frac{7}{15}\right)^2\cdot\frac{8}{15}} > 0$$

Note que W é igual a $-U(r_{min})$

PROB. 3 8.

(a) menor valor h_1 de h para a volta toda.

(i) referência : nível zero



i) por conservação de energia

$$mgh = \frac{1}{2} m v_A^2 + mgh_A \quad (1) \qquad h_A = 2R$$

ii) Pela 2ª Lei de Newton (no ponto A):

$$mg + N = \frac{m v_A^2}{R}$$

$$m v_A^2 = mgR + N \quad (2)$$

iii) A menor velocidade é tal que $N = 0$

$$m v_A^2 = mgR$$

$$v_A = \sqrt{gR} \quad (3)$$

Substituindo (3) em (1), temos:

$$mgh_1 = \frac{1}{2} m.gR + 2mgR$$

$$h_1 = \frac{R}{2} + 2R = \boxed{\frac{5}{2} R}$$

(b) Seja q.q ponto (B) onde $R < h < h_1$

Temos pela 2ª Lei de Newton

$$N + mg.\cos\theta = \frac{mv^2(\theta)}{R}$$

$$N(\theta) = \frac{mv^2(\theta)}{R} - mg.\cos\theta$$

ii) condição p/ cair (perde o contato $N(\theta)=0$).

$$0 = \frac{\cancel{m}v^2(\theta)}{R} - \cancel{m}g.\cos\theta$$

$$\boxed{v^2(\theta) = Rg.\cos\theta}$$

iii) pela conservação de energia:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2(\theta) + mg\,z(\theta)$$

$$z(\theta) = R + R.\cos\theta$$

$$mgh = \frac{1}{2}m.v^2(\theta) + mgR + mgR.\cos\theta$$

$$v^2(\theta) = 2gh - 2gR - 2gR.\cos\theta$$

mas $\Rightarrow R.g.\cos\theta = v^2(\theta)$

$$Rg.\cos\theta = 2gh - 2gR - 2gR.\cos\theta$$

$$3R\cos\theta = 2(h-R) \Rightarrow$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{2}{3}\left(\frac{h}{R} - 1\right)}$$

Prob 3

(c) p/ $h < R$

$$mgh = \frac{1}{2} m v^2(\alpha) + mgR - mgR.\cos(\alpha)$$

α: é o ângulo medido com a vertical a partir do pto mais baixo

hipótese: $v(\alpha) = 0$

$$mgh = mgR - mgR.\cos\alpha$$

$$R.\cos\alpha = R - h$$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{h}{R}$$

Interpretação:

o carrinho sobe um ângulo α depois de ultrapassar o pto mais baixo, volta a descer e continua a oscilar