Universidade de São Paulo
ICMC - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Professora: Regilene Delazari dos Santos Oliveira
Alunos:

Álgebra Linear - SMA0304
Atividade Bônus 10

27/11/2023

Questão 1. Encontre as possíveis matrizes na forma canônica de Jordan de um operador T cujo polinômio característico é:

1. $p_T(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda-2)^3$.
2. $p_T(\lambda) = (\lambda-2)^2(1+\lambda^2)$.

Solução: Vamos introduzir a seguinte notação: $D(\lambda; n)$ é a matriz diagonal de ordem n cujos elementos não nulos são λ. Recorde ainda que $J(\lambda; n)$ denota o bloco de Jordan relativo ao autovalor λ de ordem n. Portanto, considerando as multiplicidades algébricas dos autovalores, temos as seguintes possibilidades:

1. $\dim V(-1) = 2$ e $\dim V(2) = 3$, caso em que o operador é diagonalizável:
$$\begin{pmatrix} D(-1;2) & 0 \\ 0 & D(2;3) \end{pmatrix}.$$
2. $\dim V(-1) = 2$ e $\dim V(2) = 2$:
$$\begin{pmatrix} D(-1;2) & 0 & 0 \\ 0 & J(2;2) & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
3. $\dim V(-1) = 2$ e $\dim V(2) = 1$:
$$\begin{pmatrix} D(-1;2) & 0 \\ 0 & J(2,3) \end{pmatrix}.$$
4. $\dim V(-1) = 1$ e $\dim V(2) = 3$:
$$\begin{pmatrix} J(-1,2) & 0 \\ 0 & D(2,3) \end{pmatrix}.$$
5. $\dim V(-1) = 1$ e $\dim V(2) = 2$:
$$\begin{pmatrix} J(-1;2) & 0 & 0 \\ 0 & J(2;2) & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
6. $\dim V(-1) = 1$ e $\dim V(2) = 1$:
$$\begin{pmatrix} J(-1,2) & 0 \\ 0 & J(2,3) \end{pmatrix}.$$

Para o segundo polinômio, relembre que a matriz $R(\alpha, \beta; n)$ é formada por n blocos de 2×2 da forma $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, onde $\alpha + \beta i$ é o autovalor complexo associado. Em nosso caso, como $\lambda^2 + 1 = (\lambda + i)(\lambda - i)$, $\alpha = 0$ e $\beta = 1$. Como a multiplicidade dos autovalores complexos é 1, esse bloco aparece somente uma vez. Por outro lado, o autoespaço associado a $\lambda = 2$ pode ter dimensão 1 ou 2. Portanto, as possibilidades são:

$$\begin{pmatrix} D(2;2) & 0 \\ 0 & R(0,1;2) \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} J(2;2) & 0 \\ 0 & R(0,1;2) \end{pmatrix}$$

■

Questão 2. Sabendo-se que uma matriz A de ordem 3 tem como autovalores 1 e 2, escreva as possíveis formas canônicas de Jordan de A. Identifique as multiplicidades algébricas em cada caso.

Solução:
Nesse caso, há duas possibilidades para as multiplicidades algébricas $m(\lambda)$ de 1 e 2.

1. $m(1) = 2$ e $m(2) = 1$:
   (a) $\dim V(1) = 2$ e $\dim V(2) = 1$:
   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
   (b) $\dim V(1) = 1$ e $\dim V(2) = 1$:
   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
2. $m(1) = 1$ e $m(2) = 2$:
   (a) $\dim V(2) = 2$ e $\dim V(1) = 1$:
   $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (b) $\dim V(2) = 1$ e $\dim V(1) = 1$:
   $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

Questão 3. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, $T(x, y, z, t) = (x + y, y, 2z + t, 2z + t)$.

a) Calcule o polinômio característico de T.

b) Determine a multiplicidade geométrica e algébrica de cada autovalor.

c) Encontre a matriz na forma canônica de Jordan do operador T.

d) Encontre uma base de $\mathbb{R}^4$ com relação a qual a matriz de T está na forma canônica de Jordan.

Solução: A matriz de T com relação à base canônica é:

$$[T]_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico associado é o seguinte determinante:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2\lambda(\lambda-3).$$

As raízes de $p(\lambda)$ e suas respectivas multiplicidades são:

$$\lambda = 1 \ ; \ m(1) = 2.$$
$$\lambda = 0 \ ; \ m(0) = 1.$$
$$\lambda = 3 \ ; \ m(3) = 1$$

Os autoespaços associados são os seguintes. Com relação a $\lambda = 1$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{vmatrix}$$

cuja solução é o autoespaço $V(1) = \{(x, 0, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ de dimensão 1.

Com relação a $\lambda = 3$:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & | & 0 \end{vmatrix}$$

cuja solução é o autoespaço $V(3) = \{(0, 0, z, z) : z \in \mathbb{R}\}$ também de dimensão 1.

Com relação a $\lambda = 0$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & | & 0 \end{vmatrix}$$

cuja solução é o autoespaço $V(0) = \{(0, 0, z, -2z) : z \in \mathbb{R}\}$ também de dimensão 1.

Portanto, a forma canônica da matriz é, a menos de permutação:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Para obter uma base, com relação a $\lambda = 1$, podemos começar com $v_1 = (1, 0, 0, 0)$, para $\lambda = 0$ tomamos $v_3 = (0, 0, 1, -2)$ e para $\lambda = 3$, $v_4 = (0, 0, 1, 1)$. A seguinte relação é válida:

$$T(v_2) = 1.v_1 + 1.v_2 = (1, 1, 0, 0) \rightarrow v_2 = (0, 1, 0, 0)$$

Portanto, a base procurada é:

$$B = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, -2), (0, 0, 1, 1)\}.$$