Universidade de São Paulo
ICMC - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Professora: Regilene Delazari dos Santos Oliveira
Alunos:

# Álgebra Linear - SMA0304
## Atividade Bônus 9

16/11/2023

**Questão 1.** Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, $T(x, y, z, t) = (x+2y, y, 2z+t, 2z+t)$.

a) Calcule os autovalores de $T$.

b) Calcule os autovetores de $T$.

c) Determine $V(\lambda)$ para cada autovalor $\lambda$. A dimensão de $V(\lambda)$ é chamada **multiplicidade geométrica de** $\lambda$. Determine a multiplicidade geométrica de cada autovalor $\lambda$.

d) Chamamos **multiplicidade algébrica do autovalor** $\lambda$ à multiplicidade de $\lambda$ como zero do determinante da matriz $[T - \lambda I]_C$, onde $I$ é a matriz identidade e $[T - \lambda I]_C$ é a matriz de $T - \lambda I$ em relação à base canônica. Determine a multiplicidade algébrica de cada autovalor do item $a$).

e) A multiplicidade algébrica e geométrica de cada autovalor do item $a$) são iguais?

**Solução**: Temos que a matriz de $T$ com relação à base canônica é:

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar os autovalores $\lambda$ precisamos encontrar o determinante da seguinte matriz:

$$[T - \lambda \mathrm{Id}] = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

Escolhendo o elemento $(1-\lambda)$ das primeiras linha e coluna, o cálculo se reduz a calcular o determinante da matriz

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

Portanto, temos que:

$$\begin{aligned} \det(T - \lambda \mathrm{Id}) &= (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2(2-\lambda) - 2(1-\lambda)\right) \\ &= (1-\lambda)^2(\lambda^2 - 3\lambda) \\ &= (1-\lambda)^2\lambda(\lambda - 3) \end{aligned}$$

Note o cuidado que se deve ter para que o polinômio característico seja obtido já de forma fatorada. Assim, os autovalores de $T$ e suas respectivas multiplicidades algébricas são:

$$\lambda_1 = 1 \ ; \ m(\lambda_1) = 2.$$
$$\lambda_2 = 0 \ ; \ m(\lambda_2) = 1.$$
$$\lambda_3 = 3 \ ; \ m(\lambda_2) = 1.$$

Para encontrar os autoespaços associados, precisamos resolver os sistemas lineares homogêneos definidos pelas matrizes $[T - \lambda \mathrm{Id}]$ para cada um dos autovalores. Para $\lambda_1 = 1$, considere:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & | & 0 \end{pmatrix},$$

cuja solução é o seguinte subespaço de dimensão 1:

$$V_1 = \{(x, 0, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Para $\lambda_2 = 0$, considere:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix},$$

cuja solução é o seguinte subespaço de dimensão 1:

$$V_2 = \{(0, 0, z, -2z) : z \in \mathbb{R}\}.$$

Para $\lambda_3 = 3$, considere:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & | & 0 \end{pmatrix},$$

cuja solução é o seguinte subespaço de dimensão 1:

$$V_3 = \{(0, 0, t, t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Para os autovalores 0 e 3 temos multiplicidades algébricas e geométricas iguais, mas para o autovalor 1 elas são diferentes.

■

---

**Questão 2.** Repita o estudo feito na Questão 1, analisando agora o operador $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, dado pela sua matriz em relação à base canônica:

$$[T]_C^C = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

É possível encontrar uma base $B$ de $\mathbb{R}^3$ formada somente por autovetores de $T$? Se sim, como seria a matriz $[T]_B^B$? Isto é, a matriz da tranformação $T$ nessa base de autovetores.

**Solução**: Procedendo como antes, considere a seguinte matriz:

$$[T - \lambda \mathrm{Id}] = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -3 & -1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & -3 & 2-\lambda \end{pmatrix},$$

cujo determinante é $(3-\lambda)(-1-\lambda)(2-\lambda)$. Portanto, todos os autovetores de $T$ possuem multiplicidade 1 e são os seguintes:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 3 \\ \lambda_2 &= -1 \\ \lambda_3 &= 2 \end{aligned}$$

Com relação aos autoespaços, para $\lambda_1 = 3$, considere:

$$[T - 3\mathrm{Id}] = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 & | & 0 \\ 0 & -4 & 0 & | & 0 \\ 0 & -3 & -1 & | & 0 \end{pmatrix},$$

cuja solução é o seguinte subespaço de dimensão 1:

$$V_1 = \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Para $\lambda_1 = -1$, considere:

$$[T - (-1)\mathrm{Id}] = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -3 & 3 & | & 0 \end{pmatrix},$$

cuja solução é o seguinte subespaço de dimensão 1:

$$V_2 = \{(x, x, x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Para $\lambda_3 = 2$, considere:

$$T - 2\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & | & 0 \\ 0 & -3 & 0 & | & 0 \\ 0 & -3 & 0 & | & 0 \end{pmatrix},$$

cuja solução é o seguinte subespaço de dimensão 1:

$$V_3 = \{(x, 0, x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Determinando bases para cada um desses espaços, obtemos que o seguinte conjunto $B$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ consistindo de autovetores de $T$:

$$\{(1,0,0), (1,1,1), (1,0,1)\}.$$

Concluímos que:

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Em outras palavras, a matriz de $T$ é *diagonalizável*.

■

---

**Questão 3.** Seja $T : \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ a transformação linear dada por $T(p(t)) = -2p'(t) + p(t)$.

a) Calcule os autovalores e os autovetores $T$.

b) Qual a multiplicidade geométrica dos autovalores encontrados? E qual a multiplicidade algébrica?

c) É possível encontrar uma base $B$ de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ formada somente por autovetores de $T$? Se sim, como seria a matriz $[T]_B^B$?

**Solução**:

Fixe para $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ a base $B = \{1, t\}$. Note que $T(1) = 1$ e $T(t) = -2 + t$. Portanto, a matriz de $T$ com relação a essa base é:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Devemos calcular o determinante da seguinte da matriz:

$$[T - \lambda \mathrm{Id}]_B = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix},$$

o qual é $(1-\lambda)^2$. Assim, o único autovalor de $T$ é $\lambda = 1$, cuja multiplicidade algébrica é 2. Considere o polinômio $p(t) = a + bt$ e a matriz

$$[T - 1.\mathrm{Id}] = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos,

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & -2 & a \\ 0 & 0 & b \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cuja solução nos dá $b = 0$. Daí, obtemos o seguinte subespaço de dimensão 1

$$V = \{p(t) = a + bt : b = 0, a \in \mathbb{R}\} = \{a \in \mathbb{R}\} = [1].$$

Portanto, não é possível obter uma base de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ formada somente por autovetores de $T$.

■