Gabarito - Lista 5

Valores utilizados:

- $h = 6.6 \times 10^{-34}$ m^{2}kg/s
- $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg
- 1 eV $= 1.6 \times 10^{-19}$ J
- $c = 3 \times 10^8$ m/s
- $k_B = 1.4 \times 10^{-23}$ m^{2}kg s^{-2}K^{-1}
- $m_n = 1.7 \times 10^{-27}$ kg
- $m_\alpha = 6.6 \times 10^{-27}$ kg

1. Pela relação De Broglie entre comprimento de onda e momento linear $\lambda = \frac{h}{p}$, o comportamento ondulatório do objeto poderá ser objeto ao interagir com sistemas de tamanho característico $d \sim \lambda$.

a) $p = \sqrt{2mK} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{2mK}$. Dado a energia cinética $K = 50$ eV $= 8 \times 10^{-18}$ J, temos $\lambda = 1.7 \times 10^{-10}$ m, comparável ao tamanho de um átomo.

b) Para o caso relativístico, $E^2 = p^2c^2 + m_e^2c^4 \Rightarrow p = \sqrt{\frac{E^2}{c^2} - m_e^2c^2}$, dada a energia total $E = 20 \times 10^6$ eV $= 3.2 \times 10^{-12}$ J $\Rightarrow p = 1.1 \times 10^{-20}$ kg m s^{-1} $\Rightarrow \lambda = 6.2 \times 10^{-14}$ m, comparável ao tamanho de um núcleo atômico de ouro.

c) A energia cinética média de uma partícula em eq. térmico é $K = \frac{3}{2}k_BT \Rightarrow \lambda = \frac{h}{\sqrt{3k_BTm_n}} = 1.1 \times 10^{-10}$ m, comparável ao tamanho de um átomo.

d) $K = 60 \times 10^6$ eV $= 9.6 \times 10^{-12}$ J $\Rightarrow \lambda = \frac{h}{\sqrt{2Km_\alpha}} = 1.9 \times 10^{-15}$ m, comparável ao tamanho de um núcleo atômico de hélio.

e) $m_{grao} = 10^{-9}$ kg e $K = \frac{3}{2}k_BT$, logo $\lambda = 1.9 \times 10^{-19}$ m, comparável à aproximação clássica do tamanho de um quark.

f) $p = mv = 10^{-6}$ kg m s^{-1} $\Rightarrow \lambda = 6.6 \times 10^{-31}$ m, sem comparações.

2. Ao passar por uma rede de difração, a frente da onda é transmitida como múltiplos pontos de emissão, para cada distância d entre as franjas da rede, e a onda final observada no anteparo (ou ponto no espaço) é a superposição dessas novas frentes independentes. A diferença de caminho na emissão $d \sin\theta$, sendo θ o ângulo entre o feixe original e um ponto no espaço, será responsável por um padrão de interferência construtiva desde que tal distância é um múltiplo do comprimento de onda, i.e $n\lambda$ para n inteiro. Portando os picos de difração serão encontrados quando $n\lambda = d \sin\theta$ (Lei de Bragg para transmissão).

3. Partindo da hipótese de De Broglie, um objeto de massa m e velocidade v tem um comprimento de onda associado $\lambda = \frac{h}{mv}$. O elétron em órbita em um átomo pode ser interpretado como uma onda estacionária em torno do núcleo, assim não irradiando energia e colapsando (vide a aula 10 para a discussão da validade dessa interpretação). Como onda estacionária, sua órbita circular de raio r deve ser múltiplo de λ, logo $2\pi r = n\lambda = \frac{nh}{mv} \Rightarrow mvr = \frac{nh}{2\pi}$. Sendo o momento angular desse elétron $L = mvr \Rightarrow L = \frac{nh}{2\pi}$, a hipótese de De Broglie implica que L é quantizado do modo que Bohr propôs para elétrons em órbitas atómicas.

4. Note que não estamos no limite relativístico, i.e. $K = \frac{m_n v^2}{2} \Rightarrow v/c = 0.15 \ll 1$. Assim 10 MeV $\ll m_n$. $K = 10^7$ eV $= 1.6 \times 10^{-12}$ J, sendo $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2Km_n}} = 8.9 \times 10^{-15}$ m, logo o objeto deve ter um tamanho $\sim 10^{-14}$ para demonstrar as propriedades ondulatórias desses nêutrons, e.g. um núcleo atômico de ouro.

5.

   Sendo $L = \Delta x$ a distância (fixa) entre as paredes e $E = \frac{\Delta p^2}{2m}$, o princípio de incerteza de Heisenberg implica que $\Delta p \geq \frac{h}{4\pi\Delta x} \Rightarrow E \geq \frac{h^2}{32\pi^2\Delta x^2 m}$. Portando, a energia mínima da partícula é $E_{min} = \frac{h^2}{32\pi^2 L^2 m}$.

6. A energia de um sistema massa-mola é descrito por $E = \frac{p^2}{2m} + \frac{\omega^2 m x^2}{2}$, logo nosso sistema quântico será descrito por $E = \frac{\Delta p^2}{2m} + \frac{\omega^2 m \Delta x^2}{2}$. Pelo princípio de incerteza de Heisenberg, $\Delta p^2 \geq \frac{h^2}{16\pi^2\Delta x^2} \Rightarrow E \geq \frac{h^2}{32\pi^2\Delta x^2 m} + \frac{\omega^2 m \Delta x^2}{2}$. O mínimo será encontrado quando $\frac{dE}{d\Delta x} = 0$,

assim

$$m\omega^2\Delta x - \frac{h^2}{16\pi^2\Delta x^3 m} = 0 \Rightarrow \Delta x^2 = \frac{h}{4\pi m\omega}.$$

$$\Rightarrow E \geq \frac{h\omega}{8\pi} + \frac{h\omega}{8\pi} = \frac{h\omega}{4\pi}.$$