Oficinas de Demonstração - Resoluções

29/11/2023

Introdução

Olá! Este documento tem o objetivo de mostrar uma maneira de escrever as demonstrações dos exercícios propostos no projeto Oficinas de Demonstração, realizado em 2023 pelo CAEM, em parceria com a professora Daniela Mariz Silva Vieira, na disciplina MAT1514 - A Matemática na Educação Básica.

Não queremos que este documento seja entendido como *gabarito* dos exercícios, mas sim como **uma** das formas de construir as demonstrações, entre outras possíveis.

Resolução comentada

Os enunciados dos exercícios a seguir são propositalmente vagos, e suas resoluções podem ser muito subjetivas. Recomendamos que resolva todos os exercícios e discuta-os com seus colegas antes de ler as resoluções e comentários aqui apresentados. Muitas vezes os aprendizados produzidos no processo investigativo de tentativa e erro valem mais do que o conhecimento da solução!

Exercício 1: Leia, reflita e discuta:

Proposição:
Seja n um número inteiro positivo.
$n+1$ divide $n!$ se, e somente se, $n+1$ não for primo.

Argumentação:
($\Longrightarrow$) Se $n+1$ divide $n!$ e $n+1$ é primo, então $n+1$ divide algum fator de $n!$, isto é, $n+1$ divide k, para algum $1 \leq k \leq n$. Absurdo.
($\Longleftarrow$) Se $n+1$ não é primo, então existem inteiros positivos a e b tais que $n+1 = ab$ e $2 \leq a, b \leq n$. Então a e b figuram na fatoração de $n!$. Logo o produto $a.b$ divide $n!$.

Há algumas melhorias que podem ser feitas para tornar a argumentação mais clara, mas há uma falha que se sobressai.
É verdade que a e b figuram na fatoração de $n!$, e por isso a divide $n!$ e b divide $n!$. Assim, se $a \neq b$, podemos concluir que $a.b$ divide $n!$, mas se $a = b$, o argumento falha.
E o que acontece no caso $a = b$?
Investigando esse caso, podemos encontrar um contraexemplo para a proposição: $a = b = 2$, ou seja, $n = 3$. Então temos que 3+1 não é primo e 3+1 não divide 3!.
Ok. Descobrimos que a proposição é falsa. E agora?
Agora tentaremos corrigir a proposição. Podemos corrigi-la de muitas formas, que podem ser mais ou menos abrangentes:

I) $n+1$ divide $n! \Rightarrow n+1$ não é primo.
II) Se $n+1$ não é um quadrado perfeito, então vale que: $n+1$ divide $n! \Longleftrightarrow n+1$ não é primo.
III) Se $n > 3$, vale que: $n+1$ divide $n! \Longleftrightarrow n+1$ não é primo.
IV) Se $n \neq 3$, vale que: $n+1$ divide $n! \Longleftrightarrow n+1$ não é primo.

Todas essas proposições são corretas (e são, portanto, *teoremas*), mas a III) e a IV) são muito mais abrangentes que a I) e a II). Vamos agora demonstrar a proposição III).

($\Longrightarrow$) Suponha, por absurdo, que $n+1$ divide $n!$ e $n+1$ é primo. Então $n+1$ divide algum

fator de $n!$, isto é, $n+1$ divide k, para algum $1 \leq k \leq n$. Como $n+1$ e k são positivos e $n+1$ divide k, segue que $n+1 \leq k$. Absurdo.
($\Longleftarrow$) Se $n+1$ não é primo, então existem inteiros positivos a e b tais que $n+1 = ab$ e $a, b \geq 2$. Temos então que $a, b \leq n$, e por isso a e b figuram na fatoração de $n!$.

Caso 1: Se $a \neq b$, temos que a e b são dois termos presentes na fatoração de $n!$, e portanto $a.b$ divide $n!$.

Caso 2: Se $a = b$, temos que $n+1 = a^2$. Como $n > 3$, temos que $n+1 > 4$. Logo $a > 2$ e $2a < a^2 = n+1$. Então a e $2a$ são números inteiros compreendidos entre 1 e n, e por isso figuram na fatoração de $n!$. Como a e $2a$ são distintos, segue que o produto $a \cdot 2a$ divide $n!$. Portanto, a^2 divide $n!$, como queríamos demonstrar.

Observação: Mesmo uma argumentação falha de uma proposição falsa pôde ser corrigida, culminando na produção de uma demonstração (correta) de um teorema descoberto.

Exercício 2: Reflita e discuta sobre as proposições a seguir, nas quais a e b são números inteiros:
Para iniciar a discussão sobre as proposições, um bom começo é avaliar se são verdadeiras ou falsas. Para demonstrá-las, utilizaremos o seguinte lema:

Lema: $a + b$ é par se, e somente se, a e b têm a mesma paridade.[1]

i) $a + b$ par e $a \cdot b$ par $\Rightarrow$ a e b pares.

Pelo lema, a e b têm a mesma paridade. Se fossem ambos ímpares, teríamos que $a \cdot b$ é ímpar. Contradição. Portanto ambos são pares.

Comentário: A proposição é verdadeira, e para demonstrá-la são necessárias suas duas hipóteses.

A recíproca é verdadeira.

ii) $a + b$ par e $a \cdot b$ ímpar $\Rightarrow$ a e b ímpares.

Se a ou b fosse par, teríamos $a \cdot b$ par. Contradição. Portanto a e b são ímpares.

Comentário: A proposição é verdadeira, mas a hipótese "$a + b$ par" é desnecessária para a demonstração.

A recíproca é verdadeira.

iii) $a + b$ ímpar e $a \cdot b$ par $\Rightarrow$ a ou b par.

Pelo lema, como $a + b$ é ímpar, segue que a e b têm paridades distintas. Logo, a ou b é par.

Outra demonstração: Se a e b fossem ímpares, teríamos que $a \cdot b$ é ímpar, contradizendo a hipótese de que $a \cdot b$ é par. Logo a ou b é par.

Comentário: A proposição é verdadeira, e tanto a hipótese "$a + b$ ímpar" quanto a hipótese "$a \cdot b$ par" são suficientes para a demonstração. Uma hipótese torna a outra redundante. Para eliminar a redundância podemos formular a seguinte proposição:

Proposição: $a + b$ ímpar ou $a \cdot b$ par $\Rightarrow$ a ou b par.

A recíproca dessa nova proposição é verdadeira, e a recíproca da proposição original é falsa.

iv) $a + b$ ímpar e $a \cdot b$ ímpar $\Rightarrow$ a e b ímpares.

Se $a + b$ é ímpar, então, pelo lema, a e b têm paridades diferentes, logo $a \cdot b$ é par. Portanto não existem a e b inteiros que verifiquem as hipóteses da implicação. Podemos dizer então que a hipótese "$a + b$ ímpar e $a \cdot b$ ímpar", para a e b inteiros, é falsa, e por isso a proposição é verdadeira por *vacuidade*, isto é, não existem contraexemplos que a refutem e nem exemplos que a verifiquem.

A recíproca é falsa.

Observação: Veja que todas as proposições deste exercício são verdadeiras, e por isso podem ser consideradas *teoremas*, mas há muito mais do que "verdadeiro ou falso" para ser levado em consideração ao avaliar uma proposição. Podemos dizer que o teorema *i*) é o mais elegante de todos.

[1] A demonstração do lema será deixada como exercício para o leitor ;)

Os teoremas *ii*) e *iii*) têm hipóteses redundantes, e por isso poderiam ser melhor formulados. E o teorema *iv*), que é verdadeiro por vacuidade, é praticamente irrelevante, visto que não há inteiros que verifiquem suas hipóteses.