Lista de Exercícios V

1. Considere a equação

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \gamma^2 \, \phi = 0 \; ; \qquad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \; ; \qquad \mu = 0, 1, 2, 3$$

onde ϕ é uma campo real escalar de Lorentz, e γ uma constante com dimensão de L^{-1}.

   (a) Esta equação é invariante por transformações de Lorentz? Justifique, mostrando como ela transforma.

   (b) Calcule soluções de ondas planas desta equação, e a respectiva relação de dispersão entre frequência ω e vetor de onda $\vec{k}$.

   (c) Calcule a velocidade de fase $v_f = \omega/k$, para $\gamma = 0$ e $\gamma \neq 0$.

   (d) Calcule a velocidade de grupo $v_g = \frac{d\omega}{dk}$, para $\gamma = 0$ e $\gamma \neq 0$.

   (e) No caso de $\gamma \neq 0$, é possível ter ondas com frequência tão baixa quanto se queira? Se não, qual a menor frequência permitida?

2. Considere duas ondas planas unidimensionais

$$\phi_1 = \phi_0 \, \cos\left(k\, x - \omega\, t\right) \; ; \qquad \phi_2 = \phi_0 \, \cos\left(\left(k + \delta k\right) \, x - \left(\omega + \delta\omega\right) \, t\right) \; ;$$

onde $\delta k << k$ e $\delta\omega << \omega$. Utilizando identidades trigonométricas mostre que a onda $\phi = \phi_1 + \phi_2$, pode ser escrita como o produto de duas ondas planas cosenoidais, uma de frequência alta e outra de frequência baixa. Calcule as velocidades de propagação destas duas ondas, e compare com a velocidade de fase e velocidade de grupo.

3. Considere a equação

$$i \, \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\beta^2 \, \nabla^2 \phi \; ; \qquad \nabla^2 \equiv \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x^{i\,2}}$$

onde β é uma constante com dimensão de $L\, T^{-1/2}$.

   (a) Esta equação é invariante por transformações de Lorentz? Ela é invariante por transformações de Galileu? Justifique, mostrando como ela transforma.

   (b) Calcule soluções de ondas planas desta equação, e a respectiva relação de dispersão entre frequência ω e vetor de onda $\vec{k}$.

   (c) Calcule a velocidade de fase $v_f = \omega/k$.

   (d) Calcule a velocidade de grupo $v_g = \frac{d\omega}{dk}$.

4. Considere a equação

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \frac{m^2}{\beta} \, \sin\left(\beta \, \phi\right) = 0 \; ; \qquad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \; ; \qquad \mu = 0, 1, 2, 3 \qquad (0.1)$$

onde ϕ é uma campo real escalar de Lorentz, e β é uma constante adimensional e m uma constante com dimensão de L^{-1}.

(a) Esta equação é invariante por transformações de Lorentz? Justifique, mostrando como ela transforma.

(b) Calcule soluções constantes para esta equação.

(c) Mostre que

$$\phi = \pm \frac{4}{\beta} \, \text{ArcTan} \left(e^{m\,\gamma\,(\hat{n}\cdot\vec{x} - v\,t)} \right) \; ; \qquad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{0.2}$$

onde $\hat{n}$ é um vetor unitário adimensional, i.e. $\hat{n}^2 = 1$, é uma solução da equação (0.1) para qualquer valor de v, e qualquer dos dois sinais $\pm$.

(d) Calcule a densidade de Lagrangiana cuja equação de Euler-Lagrange é a equação (0.1).

(e) Calcule a densidade de Hamiltoniana (densidade de energia) correspondente.

(f) Calcule a energia da solução (0.2).

(g) Calcule a integral da densidade de Hamiltoniana ao longo do eixo-($\hat{n} \cdot \vec{x}$).