9^a Lista De Probabilidade I

1. Sejam X e Y duas variáveis aleatórias independentes com distribuição Binomial, $B(n,p)$ e $B(m,p)$. Seja $Z = X + Y$ obtenha (a) $f_Z(z)$, (b) $f_{X|z}(x) = P(X = x|Z + z)$ (c) $E(X|Z = z)$.

2. Sejam X e Y variáveis aleatórias i.i,d com distribuição uniforme com suporte $\{1, 2, \ldots, N\}$. Se $Z = X + Y$, obtenha a f.p de Z.

3. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes com distribuição gama $G(r_1, \lambda,)$ e $G(r_4, \lambda)$ respectivamente e seja $Z = X + Y$. Determinar: (a) a f.d.p da variável aleatória Z; (b) $E(X|Z = z)$.

4. Seja $X_1, \ldots, X_n$ v.a´s i.i.d com f.d.p dada por

$$f(x; \theta) = \frac{1}{2\theta} e^{-\frac{|x|}{\theta}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

onde $\theta \in \Theta = \mathbb{R}_+$ e seja $S_n = \sum_{i=1}^{n} |X_i|$. Determine a distribuição exata e aproximada de S_n.

5. Sejam $\{X_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d com distribuição normal com média μ e variância σ^2. Qual é a distribuição exata e aproximada de

$$W_n = \frac{X_1^2 + \cdots + X_n^2}{n}?$$

6. Se 65% da população em um comunidade é favorável à proposta de aumento nas mensalidades escolares, dê uma aproximação para a probabilidade de que uma amostra aleatória de 100 pessoas desta comunidade irá conter: (a) pelo menos 50 pessoas favoráveis à proposta. (b) No máximo 75 pessoas favoráveis à proposta. Justifique seu procedimento.

7. Suponha-se que 30 dispositivos eletrônicos, $X_1, \ldots, X_{30}$, sejam empregados da seguinte maneira: Tão logo X_1 falhe X_2 entra em operação. quando X_2 falhar, X_3 entrará em operação etc. Suponha que duração até falhar de X_i seja uma variável aleatória exponencialmente distribuída, com média de 10 horas. Seja T o tempo total de operação dos 30 dispositivos. Qual é a probabilidade de que T ultrapasse 360 horas?

8. O consumo mensal de água por residência de um certo bairro de São Carlos possui média de 10 m^3 com desvio padrão de 2 m^3. Qual é a probabilidade de que em uma rua com 30 residências a quantidade total de água não ultrapasse 350 m^3. (Justifique seu procedimento)

9. Seja X uma variável aleatória com distribuição gama de parâmetros $n \in \mathcal{N}$ e $\lambda > 0$. Justifique o emprego da distribuição normal para efetuar cálculos de probabilidade da variável aleatória X. Mostre como calcular, por exemplo a probabilidade de $P[X \leq x]$, $x \in R^+$.

10. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídos com distribuição uniforme, no intervalo $(0, 1)$.

    (a) Determine a distribuição do $Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$;

    (b) Determine o maior valor de n tal qu $P[Y_n \geq 0,99] \geq 0,95$.

11. Sejam as variáveis aleatórias $X_1, \ldots, X_n$ independentes e expoenciais com parâmetros $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ respectivamente. Prove que para $k = 1, \ldots, n$.

    (a) Mostre que a distribuição de $Y = \min(X_1, \ldots, X_n)$ é exponencial.

    (b) Prove que para $k = 1, \ldots, n$

    $$P\left(X_k = \min(X_1, \ldots, X_n)\right) = \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_k}.$$

    (Sugestão X_k e $\min(X_1, \ldots, X_{k-1}, X_{k+1}, \ldots, X_n)$ são independentes com distribuição exponenciais. Considere o evento $[X_k < \min(X_1, \ldots, X_{k-1}, X_{k+1}, \ldots, X_n)]$).

12.

13. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídos com distribuição $N(\mu, 1)$. Determine a distribuição de

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2/n}}$$

onde $\bar{X}_n = \sum_{i=1}^{n} X_i/n$.

14. Seja X_i o número de meteoros que colidem com um satélite de teste durante a i-ésima órbita. Seja $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$; isto é, S_n é o número total de meteoros que colidem com o satélite durante n órbitas. Suponha que os X_i'S sejam variáveis aleatórias independentes com distribuição de Poisson com média μ. (a) Determinar $E(S_n)$ e $Var(S_n)$ (b) Se n=100 e $\mu = 4$ encontre aproximadamente $P(S_{100} > 400)$.