Distribuição de Funções de Vetores Aleatórias

Vicente G. Cancho

Distribuição do mínimo e máximo

Teorema

Se $X_1, \ldots, X_n$ *são variáveis aleatórias independentes e indenticamente distríbuidos (i.i.d) com função de distribuição acumulada comum* $F_X(\cdot)$ *e sejam as v.a´s* $Y_1 = \min(X_1, \ldots, X_n)$ *e* $Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ *então*

$$F_{Y_1}(y) = 1 - [1 - F_X(y)]^n, \; y \in R,$$

e

$$F_{Y_n}(y) = [F_X(y)]^n, \; y \in R.$$

e

Exemplo (1)

Seja $X_1, \ldots, X_m$ variáveis aleatórias i.i.d com f.d.p.

$$f_X(x) = e^{-(x-\theta)} I_{(\theta,\infty)}(x),$$

$\theta \in \Theta = \mathbb{R}$. *Determine a f.d.p de $W = 2n(Y_1 - \theta)$*

Pode-se mostrar que a FDA de X é

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(x-\theta)} & x \geq \theta \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Do Teorema tem-se

$$\begin{aligned} F_W(w) &= P[W \leq w] = P[2n(Y_1 - \theta) \leq w] = P[Y_1 \leq \frac{w}{2n} + \theta] \\ &= F_{Y_1}(\frac{w}{2n} + \theta) = 1 - \left[1 - F_X(\frac{w}{2n} + \theta)\right]^n = (1 - e^{-w/2}) I_{(0,\infty)}(w) \end{aligned}$$

A f.d.p.

$$f_W(w) = \frac{1}{2} e^{-\frac{w}{2}} I_{(0,\infty)}(w) = \frac{1}{2^{2/2}\Gamma(2/2)} w^{\frac{2}{2}-1} e^{-\frac{w}{2}} I_{(0,\infty)}(w) \Longrightarrow W \sim \chi^2_{(2)}$$

Soma e diferença de duas variáveis aleatórias

Teorema

Seja (X, Y) *um vetor aleatório absolutamente continuo com f.d.p conjunta* $f_{X,Y}(x, y)$ *e sejam as v.a´s* $Z = X + Y$ *e* $V = X - Y$ *então*

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z - x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(z - y, y)dy$$

e

$$F_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, x - v)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(v + y, y)dy$$

Soma e diferença de duas variáveis aleatórias

Corolário

Se X e Y são variáveis aleatórias absolutamente contínuas então

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y)dy$$

e

$$f_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(x-v)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(v+y) f_Y(y)dy$$

Exemplo

Seja X e Y variáveis aleatórias i.i.d com f.d.p $f_X(x) = f_Y(y) I_{(0,1)}(x)$
Determine a f.d.p. $Z = X + Y$.

Note que o suporte de Z é $R_Z = \{z \in R; 0 < z < 2\}$. Do corolário tem-se

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} I_{(0,1)}(z-x) I_{(0,1)}(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[I_{(0,z)}(x) I_{(0,1)}(z) + I_{(z-1,1)}(x) I_{(1,2)}(z) \right] dx \\
&= I_{(0,1)}(z) \int_0^z dx + I_{(1,2)}(z) \int_1^{z-1} dx \\
&= z I_{(0,1)}(z) + (z-2) I_{(1,2)}(z)
\end{aligned}$$

Assim

$$f_Z(z) = \begin{cases} z, & 0 < x < 1 \\ z-2, & 1 \leq z < 2 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Soma e diferença de duas variáveis aleatórias

Teorema

Se X e Y são variáveis aleatórias discretas independentes então

$$f_Z(z) = \sum_x f_X(x) f_Y(z-x) = \sum_y f_X(z-y) f_Y(y)$$

Exemplo

Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes com distribuição de Poisson de parâmetros μ_1 e μ_2 respectivamente. Se $Z = X + Y$, obtenha $f_{X|z}(x) = P(X = x|Z = z)$.

A distribuição da soma $Z = X + Y$, com $X \sim Poisson(\mu_1)$ e $Y \sim Poisson(\mu_2)$, então $f_X(x) = \dfrac{e^{-\mu_1}\mu_1^x}{x!} I_A(x)$ e $f_Y(y) = \dfrac{e^{\mu_2}\mu_2^y}{y!} I_Z(y)$; para $A = \{0, 1, \dots\}$

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \sum_i^z f_X(z-i) f_Y(i) = \sum_{i=0}^{z} \frac{e^{-\mu_2}\mu_2^{z-i}}{(z-i)!} \frac{e^{-\mu_1}\mu_1^i}{i!} \\
&= \frac{e^{\mu_1+\mu_2}}{z!} \sum_{i=0}^{z} \frac{z!}{(z-i)!i!} \mu_1^i \mu_2^{z-i} \\
&= \frac{e^{\mu_1+\mu_2}}{z!} \sum_{i=0}^{z} \binom{z}{i} \mu_1^i \mu_2^{z-i} \\
&= \frac{e^{\mu_1+\mu_2}}{z!} (\mu_1+\mu_2)^z,
\end{aligned}
$$

Portanto, $Z = X + Y \sim Poisson(\mu_1 + \mu_2)$.

Agora vamos determinar a f.p de X dados X+Y=z

$$
\begin{aligned}
f_{X|Z}(x) &= \frac{P(X=x, Z=z)}{P(Z=z)} = \frac{P(X=x, Y=z-x)}{P(Z=z)} \\
&= \frac{P(X=x)P(Y=z-x)}{P(Z=z)}, \quad (X \perp Y) \\
&= \frac{\dfrac{e^{-\mu_1}\mu_1^x}{x!}\dfrac{e^{-\mu_2}\mu_2^{z-x}}{(z-x)!}}{\dfrac{e^{-(\mu_1+\mu_2)}(\mu_1+\mu_2)^z}{z!}} \\
&= \frac{z!}{x!(z-x)!}\frac{\mu_1^x \mu_2^{z-x}}{(\mu_1+\mu_2)^z} \\
&= \binom{z}{x}\left(\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\right)^x\left(\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\right)^{z-x}
\end{aligned}
$$

Portanto, $X|Z \sim Bin\left(z, \dfrac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\right)$.

Distribuição do produto e quociente

Teorema

Seja (X, Y) um vetor aleatório bi-dimensional com f.d.p $f_{X,Y}(x,y)$ e sejam as v.a´s $Z = XY$ e $U = X/Y$ então

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f_{X,Y}(x, \frac{z}{x}) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|y|} f_{X,Y}(\frac{z}{y}, y) dy.$$

e

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} |y| f_{X,Y}(uy, y)$$

Demonstração (Exercício)

Exemplo

Seja X e Y variáveis aleatórias i.i.d com f.d.p $f_X(x) = f_Y(y) I_{(0,1)}(x)$
Determine a f.d.p. $Z = XY$ e $U = X/Y$.

Do Teorema tem-se

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f_{X,Y}(x, \frac{z}{x}) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} I_{(0,1)}(x) I_{(0,1)}(\frac{z}{x}) dx \\
&= I_{(0,1)}(z) \int_{0}^{1} \frac{1}{x} I_{(z,1)}(x) dx \\
&= I_{(0,1)}(z) \int_{z}^{1} \frac{1}{x} dx \\
&= -\log(x) I_{(0,1)}(z)
\end{aligned}
$$

Distribuição da soma de variáveis aleatórios

Teorema

Se $X_1, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes e a função geradora de momentos (f.g.m) de cada um existe para todos $-h < t < h$, para algum $h > 0$, e seja

$$Y = X_1 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

então

$$m_Y(t) = \prod_{i-1}^{n} m_{X_i}(t)$$

Exemplo

Se $X_1, \ldots, X_n$ são v.a´s i.i.d com distribuição de Bernoulli com parâmetro $\theta \in (0,1)$. Determine a f.´p de $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$

Se $X_i \overset{i.i.d}{\sim}$ Bernoulli(θ), então $m_{X_i} = (1 - \theta + \theta e^t)$.
Do Teorema anterior a f.g.m de $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= \prod_{i-1}^{n} m_{X_i}(t) = \prod_{i-1}^{n} (1 - \theta + \theta e^t) \\ &= (1 - \theta + \theta e^t)^n \end{aligned}$$

a qual é a f.g.m da uma v.a. com distribuição binomial com parâmetro n e θ.

Exemplo

Se $X_1, \ldots, X_n$ são v.a´s independentes com distribuição de Poisson com parâmetro $\mu_i > 0$. Determine a f.´p de $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$

Se $X_i \overset{i.i.d}{\sim}$ Poisson(μ_i), então $m_{X_i} = e^{\mu_i(e^t-1)}$.
A f.g.m de $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= \prod_{i-1}^{n} m_{X_i}(t) = \prod_{i-1}^{n} e^{\mu_i(e^t-1)} \\ &= e^{\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i(e^t-1)} \end{aligned}$$

é a de uma v.a. com distribuição Poisson com parâmetro $\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i$. Ou seja,

$Y \sim$ Poisson($\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i$).

Exemplo

Se $X_1, \ldots, X_n$ são v.a´s independentes com distribuição de qui-quadrado com com k_i graus de liberdade. Determine a f.´p de $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$

A f.g.m de $X_i \sim \chi^2_{(k_i)}$ é $m_{X_i}(t) = (1-2t)^{-\frac{k}{2}}$.

$$m_Y(t) = \prod_{i-1}^{n} m_{X_i}(t) = \prod_{i-1}^{n} (1-2t)^{-\frac{k_i}{2}}$$
$$= (1-2t)^{-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} k_i}{2}}$$

que é a f.g.m da distribuição qui-quadrado de $\sum\limits_{i=1}^{n} k_i$. Ou seja, $Y \sim \chi^2_{(\sum\limits_{i=1}^{n} k_i)}$.

Exemplo

Se $X_1, \ldots, X_n$ são v.a´s independentes com distribuição de normal com média μ_i e variância σ_i^2 . Determine a f.´p de $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$

A f.g.m de $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ é $m_{X_i}(t) = e^{\mu_i t + \sigma_i^2 t^2/2}$.

$$
\begin{aligned}
m_Y(t) &= \prod_{i-1}^{n} m_{X_i}(t) = \prod_{i-1}^{n} e^{\mu_i t + \sigma_i^2 t^2/2} \\
&= e^{\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i t + \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i^2 t^2/2}
\end{aligned}
$$

que é a f.g.m da distribuição Normal . Ou seja, $Y \sim N(\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i, \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i^2)$.

Teorema

Se $X_1, \ldots, X_n$ *são v.a´s i.i.d com distribuição normal com média média* μ *e variância* σ^2. *Seja* $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ *e* $\bar{X}_n = \frac{S_n}{n}$, *então*

$$S_n \sim N(n\mu, n\sigma^2), \text{ e } \bar{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n).$$

Teorema Central do Limite

Se para cada inteiro positivo n, $X_1, \dots, X_n$ são v.a´s i.i.d com distribuição normal com média média μ e variância $\sigma^2 < \infty$, então para cada z,

$$F_{Z_n}(z) \text{ converge para } \Phi(z) \text{ conforme } n \text{ se aproxima de } \infty,$$

onde

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Nota

- $S_n \approx N(n\mu, n\sigma^2)$
- $\bar{X}_n \approx N(\mu, \sigma^2/n)$

Exemplo

Seja $X_1, \ldots, X_n$ n v.a.´s i.i.d com distribuição $U(0, \theta)$. Determine $P(\overline{X}_n > \theta)$.

Solução: Se $X \sim U(0, \theta)$, então $E[X] = \theta/2$ e $Var(X) = \theta^2/12$. Pelo T.C.L. tem-se $\overline{X}_n \approx N\left(\frac{\theta}{2}, \frac{\theta^2}{12n}\right)$.

$$P(\overline{X}_n > \theta) = P\left(\sqrt{12n}\frac{(\overline{X}_n - \theta/2)}{\theta} > \sqrt{12n}\frac{(\theta - \theta/2)}{\theta}\right)$$
$$= 1 - P\left(Z \leq \frac{\sqrt{12n}}{2}\right) = 1 - \Phi\left(\sqrt{3n}\right).$$

Teorema (Método Delta)

Suponha que $\sqrt{n}(Y_n - \mu) \xrightarrow{\lceil} N(0, \sigma^2)$ e seja $g(\cdot)$ uma função diferenciável tal que $g'(\mu) \neq 0$, então

$$\sqrt{n}(g(Y_n) - g(\mu)) \xrightarrow{\lceil} N(0, [g'(\mu)]^2\sigma^2),$$

ou seja, Se $Y_n \approx N(\mu, \sigma^2/n)$, então $g(Y_n) \approx N(g(\mu), [g'(\mu)]^2\sigma^2/n)$.

Exemplo

Seja $X_1, \ldots, X_n$ n v.a.´s i.i.d com distribuição Exponencial com média θ. Determine a distribuição assintótica de $g(\overline{X}_n) = e^{-\overline{X}_n}$.

Solução: Como $X_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} Exp(1/\theta)$, então $E[X] = \theta$, $Var(X) = \theta^2$. Pelo TCL, tem-se $\overline{X}_n = \sum_{i=1}^{n} X_i/n$ tem distribuição assintoticamente Normal com média θ e variância θ^2/n, ou seja,

- $\sqrt{n}(\overline{X} - \theta) \approx N(0, \theta^2)$,
- $g(x) = e^{-x}$, $g'(x) = -e^{-x}$ e $g'(\theta) = -e^{-\theta} \neq 0$.

Pelo método Delta, $\sqrt{n}(e^{-\overline{X}_n} - e^{-\theta}) \approx N(0, \theta e^{-2\theta})$.

Exemplo (3.1 Distribuição Gamma)

Seja $X_1, \ldots, X_n$ v.a´s i.i.d com $X \sim$ Gamma(α, λ). Determine a distribuição de, $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Solução: $E(X) = \mu = \alpha/\lambda$ e $Var(X) = \sigma^2 = \alpha/\lambda^2$

- $X_i \overset{i.i.d.}{\sim}$ Gamma(α, λ), o qual implica que a f.g.m. é dada por

$$m_{X_i}(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^{\alpha}, \; t < \lambda.$$

A f.g.m de $\bar{X}$

$$m_{\bar{X}}(t) = E(e^{\bar{X}t}) = E\left(e^{\frac{X_1 t}{n}+\cdots+\frac{X_n t}{n}}\right) = E\left(e^{\frac{X_1 t}{n}} \times \cdots \times e^{\frac{X_n t}{n}}\right)$$
$$= E(e^{\frac{X_1 t}{n}}) \times \cdots \times E(e^{\frac{X_n t}{n}}) = m_{X_1}(\frac{t}{n}) \ldots m_{X_n}(\frac{t}{n})$$
$$= \left(\frac{\lambda}{\lambda - \frac{t}{n}}\right)^{n\alpha} = \left(\frac{n\lambda}{n\lambda - t}\right)^{n\alpha}.$$

Dai temos que

$$\bar{X} \sim \mathrm{Gama}(n\alpha, n\lambda)$$

Note que

$$E(\bar{X}) = \frac{n\alpha}{n\lambda} = \frac{\alpha}{\lambda} = \mu,\ Var(\bar{X}) = \frac{n\alpha}{(n\lambda)^2} = \frac{\alpha}{n\lambda^2} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

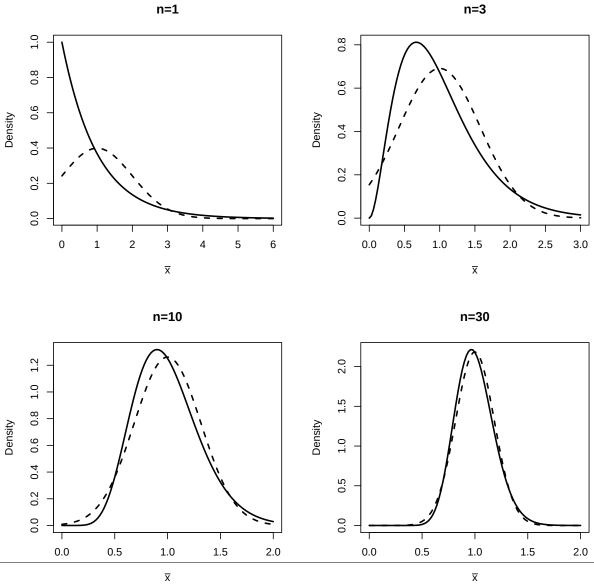
Pelo TCL $\bar{X}_n \approx N(\alpha/\lambda.\alpha/n\lambda^2)$

Exemplo (Modelo Exponencial)

Se $X_1, \ldots, X_n$ são v.a´s i.i.d com distribuição exponencial exponencial com média 1.

- Vimos que $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Gama}(n, 1)$.
- Da propriedade da distribuição Gama tem-se $\bar{X}_n \sim \text{Gama}(n, n)$.
- Pelo TCL $\bar{X}_n$ segue uma distribuição aproximadamente normal com média 1 e variância $1/n$, para n suficientemente grande.

Distribuição de $\bar{X}_n$



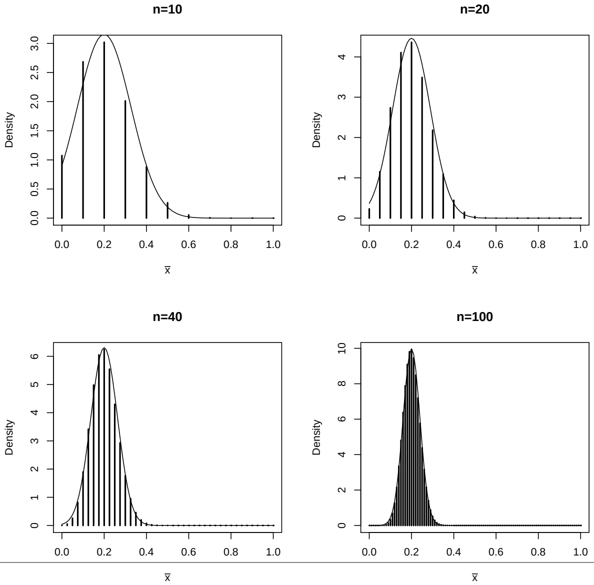
Distribuição de $\bar{X}_n$

Exemplo (3.3. Modelo Bernoulli)

Se $X_1, \ldots, X_n$ v.a´s i.i.d com distribuição Bernoulli com média 0,2.

- A distribuição $\bar{X}_n$ tem a função de massa de probabilidade é dado por
$$P\left[\bar{X} = \frac{k}{n}\right] = \binom{n}{k}(0,2)^k(0,8)^{n-k}, \; k = 0, 1, \ldots, n.$$
- Pelo TCL $\bar{X}_n$ segue uma distribuição aproximadamente normal com média 0,2 e variância $0,16/n$, para n suficientemente grande.

Distribuição de $\bar{X}_n$



Distribuição de $\bar{X}_n$

Consideremos um v.a com a seguinte distribuição de probabilidade

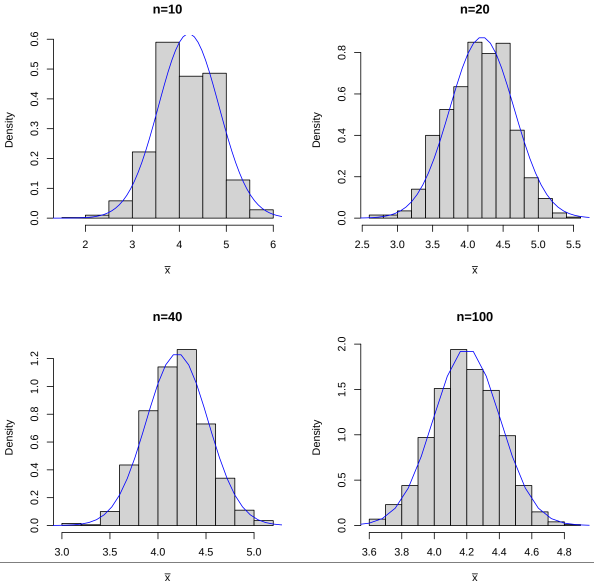
x	1	3	5	7
$f_X(x) = P(X = x)$	$1/5$	$1/5$	$2/5$	$1/5$

A média e variância de X são respectivamente

$$\mu = 4,2 \text{ e } \sigma^2 = 4,16$$

Seja $X_1, \ldots, X_n$ v.a´s com $n = 10, 20, 40$ e 100 a distribuição de $\bar{X}_n$ tem a seguintes formas

Distribuição de $\bar{X}_n$



Teorema

Sejam X_1 e X_2 duas V.A.s contínuas com f.d.p. conjunta $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$ com suporte $R_{x_1,x_2} = \{(x_1,x_2), f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) > 0\}$. Assuma que,

1) $Y_1 = g_1(X_1,X_2)$ e $Y_2 = g_2(X_1,X_2)$, define uma transformação 1 a 1 de R_{X_1,X_2} em R_{Y_1,Y_2}.
2) As derivadas parciais de $x_1 = g_1^{-1}(y_1,y_2)$ e $x_2 = g_2^{-1}(y_1,y_2)$ são contínuas em R_{Y_1,Y_2}.
3) O Jacobiana da transformação é diferente de zero para $(Y_1, Y_2) \in R_{Y_1,Y_2}$.
   Então, a f.d.p. conjunta de $Y_1 = g_1(X_1,X_2)$ e $Y_2 = g_2(X_1,X_2)$ é dada por

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = |J| f_{X_1,X_2}(g_1^{-1}(y_1,y_2), g_2^{-1}(y_1,y_2)) \in R_{Y_1 \times Y_2}.$$

Exemplo

Se X_1 e X_2 são v.a´s independentes, tais que $X_i \sim N(0,1)$. Determinar: a) A f.d.p. conjunta de $Y_1 = X_1 + X_2$ e $Y_2 = X_1 - X_2$. b) Determinar as f.d.p. marginais.

Solução: A f.d.p. conjunta de X_1 e X_2 é:

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2) = \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\right), \quad (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

$$y_1 = x_1 + x_2 = g_1(x_1,x_2) \text{ e } y_2 = x_1 - x_2 = g_2(x_1,x_2)$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = g_1^{-1}(y_1,y_2) \text{ e } x_2 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2) = g_2^{-1}(y_1,y_2)$$

A matriz Hessiana:

$$|\boldsymbol{J}| = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} g_1^{-1}(y_1, y_2) & \frac{\partial}{\partial x_2} g_1^{-1}(y_1, y_2) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} g_2^{-1}(y_1, y_2) & \frac{\partial}{\partial x_2} g_2^{-1}(y_1, y_2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} = |-1/2| = 1/2.$$

Pelo resultado anterior, temos:

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}\frac{1}{4}[(y_1+y_2)^2+(y_1-y_2)^2]} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2\cdot 2}y_1^2}}_{N(0,2)} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2\cdot 2}y_2^2}}_{N(0,2)}$$

$$\Rightarrow f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = f_1(y_1) f_2(y_2), \forall (y_1, y_2).$$

Note que:

1) $Y_1 = X_1 + X_2 \sim N(0, 2)$;
2) $Y_2 = X_1 - X_2 \sim N(0, 2)$; e
3) $Y_1 \perp Y_2$ (Y_1 e Y_2 são independentes).

Teorema (Distribuição t-Student)

Seja as variáveis $Z \sim N(0,1)$ e $W \sim \chi^2_{(k)}$ independentes. A v.a. definida por

$$T = \frac{Z}{\sqrt{W/k}},$$

tem distribuição t-Student com k graus de liberdade com f.d.p. dada por:

$$f(t) = \frac{\Gamma((k+1)/2)}{\sqrt{k\pi}\Gamma(k/2)} \left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{-(k+1)/2}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Demonstração: Seja $T = \dfrac{Z}{\sqrt{W/k}} = g_1(Z,W)$ e $U = W = g_2(Z,W)$

$$\Rightarrow W = U \text{ e } Z = T\sqrt{U/k}.$$

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{t}{2\sqrt{uk}} & \sqrt{\dfrac{u}{k}} \end{bmatrix} \Rightarrow |\boldsymbol{J}| = \sqrt{\frac{u}{k}}.$$

Distribuição t-Student

$$Z \sim N(0,1) \Rightarrow f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}, z \in \mathbb{R}.$$

$$W \sim \chi^2_{(k)} \Rightarrow f_W(w) = \frac{1}{\Gamma(k/2)2^{k/2}} w^{k/2-1} e^{-w/2}, w \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow f_{W,Z}(w,z) = f_Z(z) f_W(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \frac{1}{\Gamma(k/2)2^{k/2}} w^{k/2-1} e^{-w/2}.$$

Pelo resultado, temos que: $f_{U,T}(u,t) = |\boldsymbol{J}| f_{W,Z}(u, t\sqrt{u/k})$. Logo,

$$f_{U,T}(u,t) = \frac{u^{1/2}}{k^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{u^{k/2-1} e^{-t^2 u/2k}}{\Gamma(k/2)2^{k/2}} = \frac{u^{k/2+1/2-1} e^{-u(1/2+t^2/2k)}}{\Gamma(k/2) k^{1/2} 2^{1/2} \pi^{1/2} 2^{k/2}}$$

$$\Rightarrow f_{U,T}(u,t) = \frac{u^{(k+1)/2-1} e^{-u(1/2+t^2/2k)}}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma(k/2) 2^{(k+1)/2}}, u > 0, t \in \mathbb{R}.$$

Distribuição t-Student

Daí, as f.d.p. de T é

$$f_T(t) = \int_0^\infty f_{U,T}(u,t)du = \frac{1}{\sqrt{\pi}k2^{k/2}} \int_0^\infty u^{(k+1)/2-1} e^{-u(1/2+t^2/2k)} du.$$

$$\Rightarrow f_T(t) = \frac{\Gamma((k+1)/2)}{\sqrt{\pi k}\Gamma(k/2)} (1+t^2/k)^{-(k+1)/2}.$$

Distribuição t-Student

Propriedades

Se $X \sim t_{(k)}$, tem-se

i) $E[X] = 0$ e $Var(X) = \dfrac{k}{k-2}$, $k > 2$.

ii) Quando $k = 1$, tem-se a distribuição de Cauchy.

iii) A distribuição é simétrica ao redor de 0.

iii) A v.a. $Y = \mu + \sigma X$, tem f.d.p. dada por:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma} \frac{\Gamma((k+1)/2)}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} \left(1 + \frac{(y-\mu)^2}{k\sigma^2}\right)^{-(k+1)/2}, \quad y \in \mathbb{R}$$

Notação: $Y \sim t_{(k)}(\mu, \sigma^2)$

Distribuição t-Student

Demonstração: i) $X = \dfrac{Z}{\sqrt{U/k}}$

$$\Rightarrow E[X] = E[Z(U/k)^{-1/2}] \Rightarrow E[X] = E[Z]E[(U/k)^{-1/2}] = 0,$$

pois $E[Z] = 0$. Também, $Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = E[X^2]$, pois $E[X] = 0$. Note que:

$$X^2 = \frac{kZ^2}{U} \Rightarrow E[X^2] = E[kZ^2]E[U^{-1}] (Z \perp U)$$

$$\Rightarrow E[X^2] = kE[Z^2]E[U^{-1}], \tag{1}$$

onde $E[Z^2] = Var(Z) = 1$ e $U \sim \chi^2_{(k)}$, então a f.d.p.

$$f(u) = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} u^{k/2-1} e^{-u/2}, \quad u > 0.$$

Distribuição t-Student

$$E[U^{-1}] = \int_0^{\infty} u^{-1} f(u) du = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} \int_0^{\infty} u^{k/2-1-1} e^{-u/2} du, \quad u > 0.$$

$$E[U^{-1}] = \frac{\Gamma(k/2-1)}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} 2^{k/2-1} = \frac{2^{-1}}{k/2-1} = \frac{1}{k-2}.$$

Portanto, $Var(X) = \frac{k}{k-2}, \forall k > 2.$

No R a f.d.p, f.d.a e função quantil e função geradora da v.a $X \sim t_{(k)}$

```
dt(x, df, ncp, log = FALSE)
pt(q, df, ncp, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
qt(p, df, ncp, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
rt(n, df, ncp)
```

A distribuição F-Snedecor

Teorema

Suponha que $U_1 \sim \chi^2_{(k_1)}$ e $U_2 \sim \chi^2_{(k_2)}$, onde U_1 e U_2 são independentes, então a V.A. $X = \dfrac{U_1/k_1}{U_2/k_2}$ tem distribuição F-Snedecor com k_1 e k_2 graus de liberdade e sua f.d.p. é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{Beta(k_1/2, k_2/2)} \frac{k_1}{k_1} \frac{(k_1 x/k_2)^{k_1/2-1}}{(1 + k_1 x/k_2)^{k_1/2+k_2/2}}, \quad x \in (0, \infty).$$

Notação: $X \sim F(k_1, k_2)$.

Demonstração:(Exercício)