PÁG. 41 EX. 6

Duas retas distintas não podem ter um mesmo semiplano.

→ REVISANDO...

POSTULADO DA SEPARAÇÃO DO PLANO: Uma reta r no plano π define semiplanos H_1 e H_2 tais que:

- H_1 e H_2 são convexos;
- $H_1 \cup r \cup H_2 = \pi$;
- $H_1 \cap r = H_2 \cap r = H_1 \cap H_2 = \emptyset$.

→ IDEIA...

Vamos mostrar que duas retas distintas não podem ter um mesmo semiplano, mostrando que retas que tem um mesmo semiplano não podem ser distintas.

→ RESOLVENDO...

Sejam r e s retas, H_1 e H_2 lados de r, H_3 e H_4 lados de s, π plano, suponha sem perda de generalidade que $H_1 = H_3$. → Daí se tem as duas retas e um lado em comum

Pelo Postulado de Separação do Plano sabe-se que:

$H_1 \cup r \cup H_2 = \pi = H_3 \cup s \cup H_4$, além de que $H_1 \cap r = H_1 \cap H_2 = \emptyset = H_3 \cap s = H_3 \cap H_4$

Então, $r \cup H_2 = s \cup H_4$

Logo, dados dois pontos A e B em r, tais pontos só podem estar em s ou H_4:

Se $A, B \in s$, então $r = s$, já que por postulado dados dois pontos existe uma única reta que os contém... além disso, $H_2 = H_4$ e as propriedades se estabelecem adequadamente. → Vamos ver que nos outros casos sempre haverá um absurdo ☺

Se $A \in s$ e $B \in H_4$ ou $A \in H_4$ e $B \in s$, então a reta r possui pontos em $H_3 = H_1$, o que é um absurdo já que $r \cap H_1 = \phi$.

Mostrando que se teria pontos de r em H_3:

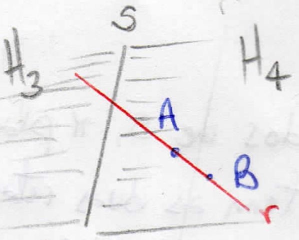
Suponha sem perda de generalidade que $A \in s$ e $B \in H_4$, então ao considerar $\overleftrightarrow{AB}$ e um ponto P tal que $P-A-B$, $P \in H_3$ ou $P \in H_4$ ou $P \in s$.

Se $P \in s$ aconteceria o absurdo de r interceptar s em dois pontos (A e P).

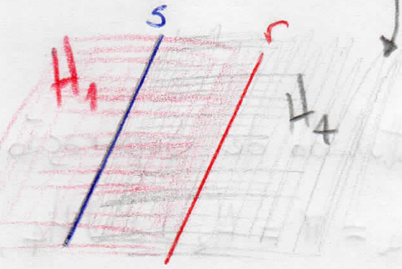
Se $P \in H_4$ aconteceria o absurdo de $A \in s$ mesmo sendo $A \in \overline{PB}$, $P, B \in H_4$ e H_4 convexo (em palavras humanas: Como H_4 é convexo, se $P, B \in H_4$, então o segmento $\overline{PB}$ deveria estar todo contido em H_4, mas não, $A \notin H_4$).

Portanto, $P \in H_3$.

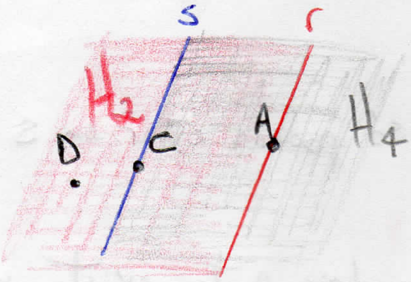
Se $A, B \in H_4$, $\overleftrightarrow{AB}$ não pode interceptar s, pois assim como no caso anterior isso implicaria que $r = \overleftrightarrow{AB}$ possui pontos em $H_3 = H_1$ e se chegaria num absurdo.



Mas então, se $A, B \in H_4$ e $r \cap s = \phi$, s está num dos lados de r... se $s \subset H_1$ é um absurdo que $H_1 = H_3$, pois $s \cap H_3 = \phi$ e $s \cap H_1 \neq \phi$.



E se $s \subset H_2$, dados $A \in r$, $C \in s$ e D tal que $D-C-A$, então $D \notin H_1$ e $D \notin H_3$. (Logo $H_1 = H_3$ é um absurdo)



FINALMENTE!

Considerando que duas retas ~~possuem~~ definem um mesmo semiplano conclui-se que elas DEVEM ser iguais, portanto, duas retas distintas não podem ter um mesmo semiplano.