PÁG. 41 EX. 2

Seja D um ponto com $D-B-C$ e $E \in int(\angle ABC)$. Prove que $A \in int(\angle DBE)$.

→ REVISANDO...

• POSTULADO DA SEPARAÇÃO DO PLANO: Uma reta r no plano π define semiplanos H_1 e H_2 tais que:

- H_1 e H_2 são convexos;
- $H_1 \cup r \cup H_2 = \pi$;
- $H_1 \cap r = H_2 \cap r = H_1 \cap H_2 = \emptyset$.

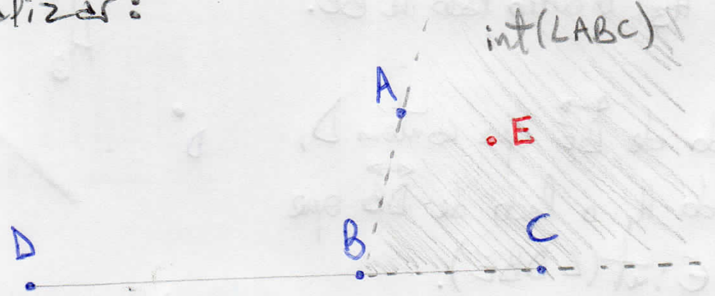
• INTERIOR DE ÂNGULO: Dado o ângulo $\angle AOB$, seja H_1 o lado da reta $\overleftrightarrow{OA}$ que contém B e H_3 o lado da reta $\overleftrightarrow{OB}$ que contém A. O conjunto $H_1 \cap H_3$ é chamado de interior do ângulo $\angle AOB$, denotado por $int(\angle AOB)$.

→ VISUALIZANDO...

Tentando visualizar o problema a partir de um desenho, o mais genérico possível, sabe-se que os pontos B, C e D podem estar em qualquer lugar do plano desde que $D-B-C$, e semelhantemente, o ponto A deve estar em algum lugar onde seja possível $E \in int(\angle ABC)$.

Se $A \in \overleftrightarrow{BC}$, os semiplanos de $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são os mesmos, de modo que A não está em nenhum dos lados de $\overleftrightarrow{BC}$ e é impossível satisfazer os critérios de interior de ângulo.

Isto quer dizer que A está em algum lugar do plano, que não em $\overleftrightarrow{BC}$, e daí pode-se visualizar:



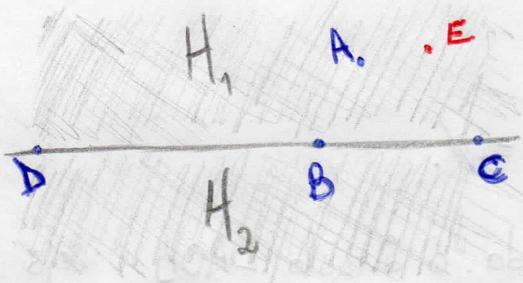
→ RESOLVENDO...

parte da definição de interior de ângulo ☺

Nomeie H_1 e H_2 os lados de $\overleftrightarrow{BC}$.

Como $E \in int(\angle ABC)$, sabe-se que E e A estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{BC}$, então, sem perda de generalidade chame esse lado de H_1.

Note que como $D\text{-}B\text{-}C$, então $\overleftrightarrow{DB} = \overleftrightarrow{BC}$, o que implica dizer que H_1 também é semiplano de $\overleftrightarrow{DB}$ contendo A e E.



Nomeie H_3 e H_4 os lados de $\overleftrightarrow{BE}$.

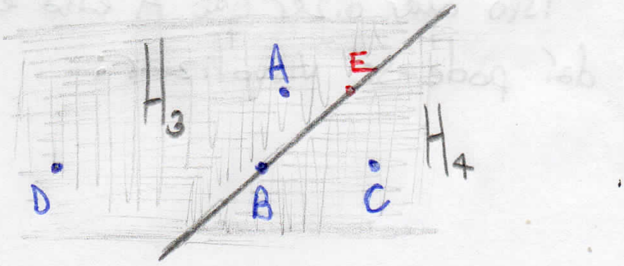
Como $E \in int(\angle ABC)$, sabe-se que $E \notin \overleftrightarrow{BC}$ e $E \notin \overleftrightarrow{BA}$ (porque o interior de um ângulo é uma intersecção de semiplanos, o que não inclui as retas que definem tais semiplanos), sendo que isso equivale a dizer que $A, C \notin \overleftrightarrow{BE}$, e consequentemente, $D \notin \overleftrightarrow{BE}$. → Se A, C e D não estão em $\overleftrightarrow{BE}$, é porque estão nos lados...

Considere, sem perda de generalidade, que H_4 é o lado de $\overleftrightarrow{BE}$ que contém C.

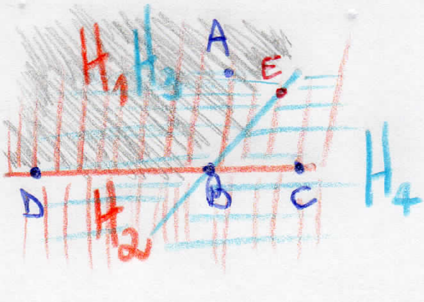
A e C estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{BE}$, caso contrário, o ponto E não estaria em $int(\angle ABC)$, o que seria um absurdo.

D e C estão em lados opostos, caso contrário, $D, C \in H_4$ e o segmento $\overline{DC} \in H_4$ porque H_4 é convexo, mas $B \in \overline{DC}$ e $B \in \overline{BE}$ de modo que $H_4 \cap \overleftrightarrow{BE} = \{B\}$, o que é um absurdo, já que $H_4 \cap \overleftrightarrow{BE} = \emptyset$.

Então, A e D estão em H_3, o outro lado de $\overleftrightarrow{BE}$.



$A \in H_3$, sendo H_3 o lado de $\overleftrightarrow{BE}$ que contém D, além disso, $A \in H_1$, sendo H_1 o lado de $\overleftrightarrow{DB}$ que contém E, portanto, $A \in int(\angle DBE)$.



■ $H_1 \cap H_3 = int(\angle DBE)$