Aula 14 - Ortogonalidade

Seja V espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$. Dizemos que u e $v \in V$ são ortogonais se

$$\langle u, v \rangle = 0.$$

Um subconjunto $\mathcal{B}$ de V é chamado ortogonal se os seus elementos são dois a dois ortogonais. Se além disso $\|u\| = 1$ $\forall u \in \mathcal{B}$ dizemos que $\mathcal{B}$ é um conjunto ortonormal.

Exemplos:

1) O vetor nulo é ortogonal a todos os elementos de V. Com efeito, $\langle 0, v \rangle = \langle 0+0, v \rangle = 2\langle 0, v \rangle$

$\rightsquigarrow$ $0 = \langle 0, v \rangle$ $\forall v \in V$. Além disso, é o único elemento em V com esta propriedade.

2) As bases canônicas de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $M_n(\mathbb{R})$ e $M_n(\mathbb{C})$ com os produtos internos canônicos são subconjuntos ortogonais.

3) Seja $V = \mathcal{C}([0,2\pi], \mathbb{R})$ munido do produto interno

$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} fg$. O conjunto $\{\cos(nx) : x \in [0,2\pi] \text{ e } n \in \mathbb{N}\}$

é ortogonal. De fato

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx) \cdot \cos(mx)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ \pi & \text{se } n = m \neq 0 \\ 2\pi & \text{se } n = m = 0 \end{cases}$$

Vejamos o caso $m \neq n$. Sem perda de generalidade tome $m \neq 0$.

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,dx = \cos(nx)\frac{\cancel{\operatorname{sen}(mx)}}{m}\Big|_0^{2\pi} \xrightarrow{} 0$$

sen$(2m\pi) = 0$
$\forall m \in \mathbb{N}$

$$+ \int_0^{2\pi} \frac{n}{m} \operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(mx)\,dx$$

$$= -\frac{n}{m}\cancel{\operatorname{sen}(nx)}\frac{\cos(mx)}{m}\Big|_0^{2\pi} + \frac{n^2}{m^2}\int_0^{2\pi}\cos(nx)\cos(mx)\,dx$$

em $x = 2\pi$ e 0

$$\therefore \int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,dx \left(1 - \frac{n^2}{m^2}\right) = 0.$$

Como $n \neq m$ obtemos o resultado.

Assim $g_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $g_n = \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}$ $n \in \mathbb{N}$ formam

um subconjunto ortonormal infinito em $\mathcal{C}([0,2\pi], \mathbb{R})$.

4) Seja $\delta_{ki} = \begin{cases} 1 & k = i \\ 0 & k \neq i \end{cases}$. Então

$$\mathcal{B} = \{ e_k \in \ell_2 : e_k = (\delta_{ki})_{i \in \mathbb{N}} \}$$

é um subconjunto ortonormal em ℓ_2 com

$$\langle (a_n), (b_n) \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \overline{b_n}.$$

Proposição: Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com produto interno. Seja $\mathcal{B} \subset V$ ortogonal formado por vetores não nulos.

(a) Se $v \in [v_1, \dots, v_n]$ com $v_i \in \mathcal{B}$ $\forall i = 1, \dots, n$, então

$$v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v, v_i \rangle v_i}{\|v_i\|^2}.$$

(b) $\mathcal{B}$ é linearmente independente.

dem (a) Se $v \in [v_1, \dots, v_n]$ então $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ para $\alpha_i \in \mathbb{K}$ $\forall i = 1, \dots, n$. Assim, para cada $k = 1, \dots, n$

$$\langle v, v_k \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, v_k \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle v_i, v_k \rangle$$

$$= \alpha_k \langle v_k, v_k \rangle \text{ já que } \langle v_i, v_k \rangle = \delta_{ik}.$$

$\therefore$ $\alpha_k = \dfrac{\langle v, v_k \rangle}{\|v_k\|^2}$ seguindo o resultado.

(b) Segue de (a) tomando $v = 0$. $\blacksquare$

Corolário: Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com produto interno. Seja $\{v_1, \dots, v_n\}$ uma base ortonormal de V. Então $\forall v \in V$ temos

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle v_i.$$

Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

Teo. Todo espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$ com produto interno possui uma base ortogonal.

dem. Seja $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V. Defina $\mathcal{B}' = \{u_1, \dots, u_n\}$ da seguinte forma

$$u_1 = v_1$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1$$

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1$$

$$\vdots$$

$$u_n = v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle v_n, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i .$$

Afirmação: $\mathcal{B}'$ é um subconj. ortogonal.

dem. Faremos a prova por indução em $k \leq n$.

$k=1$, ok. Suponha afirmação verdadeira para $k-1$. Vamos mostrar para k. Para tanto temos que verificar

$$\langle u_k, u_m \rangle = 0 \quad \forall \quad m = 1, \dots, k-1.$$

$$\langle u_k, u_m \rangle = \left\langle v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i, u_m \right\rangle$$

$$= \langle v_k, u_m \rangle - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} \langle u_i, u_m \rangle$$

$$= \langle v_k, u_m \rangle - \langle v_k, u_m \rangle = 0 \quad \text{já que}$$

$$\langle u_i, u_m \rangle = 0 \quad \text{se} \quad i \leq k-1.$$

∎

Exercícios: Seção 6.2.10: 1, 2, 4, 6.

Ângulo entre vetores

Qdo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ podemos definir ângulo entre vetores não nulos pela relação

$$\theta = \arccos\left(\frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|}\right) \in [0, \pi].$$

Veja que com $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ a função arc cos está bem definida.