MAT-5865 - TRABALHO 3

Entregar até as 23h59min do dia 5 de dezembro exclusivamente por e-mail. Identifique-se nas sua folhas de resposta. A soma dos pontos é 13, mas a nota satura em 10.

Exercício 1. Seja L a assinatura contendo os símbolos de constantes $\perp$ e $\top$, e o símbolo de relação binária $<$. Seja T a L-teoria axiomatizada por:

(i) "$<$" é ordem linear: $\forall x(\neg(x < x))$; $\forall x \forall y \forall z((x < y \wedge y < z) \to x < z)$; $\forall x \forall y(x < y \vee x = y \vee y < x)$;
(ii) "$<$" é densa: $\forall x \forall y \exists z(x < y \to (x < z \wedge z < y)$
(iii) "$<$" possui máximo e mínimo: $\forall x(\perp \leq x \wedge x \leq \top)$, onde $t_1 \leq t_2$ abrevia $t_1 < t_2 \vee t_1 = t_2$.

....

(a) (3,5 pontos) Mostre que T tem um único modelo enumerável, a menos de isomorfismos (mostre, pelo método do vai-e-vem que todo modelo de T é isomorfo ao intervalo $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$, ou também, $\mathbb{Q} \cup \{\pm\infty\}$; tome cuidado com as interpretações dos símbolos de constantes).
(b) (1,5 ponto) Mostre que T é completa, no sentido que se ϕ for uma L-sentença, ou $T \models \phi$, ou $T \models (\neg\phi)$. [Sugestão, use o item (a).]
(c) (4,0 pontos) Mostre que T admite eliminação de quantificadores. [Sugestão: reduza ao caso em que a fórmula $\phi(\bar{x})$ seja da forma $\exists y\, \phi(\bar{x}, y)$, onde ψ é uma conjunção de fórmulas atômicas apenas, e faça uma argumentação por indução na quantidade dessas fórmulas atômicas, que serão de dois tipos, "$t_1 = t_2$", e "$t_1 < t_2$", onde T_1 e t_2 são L-termos – uma variável, ou um símbolo de constante.]
(d) (4,0 pontos) Mostre que o modelo enumerável de T tem $2^{\aleph_0}$ automorfismos (isomorfismos crescentes). [Sugestão: argumente com o modelo $\mathbb{Q} \cup \{\pm\infty\}$.]
