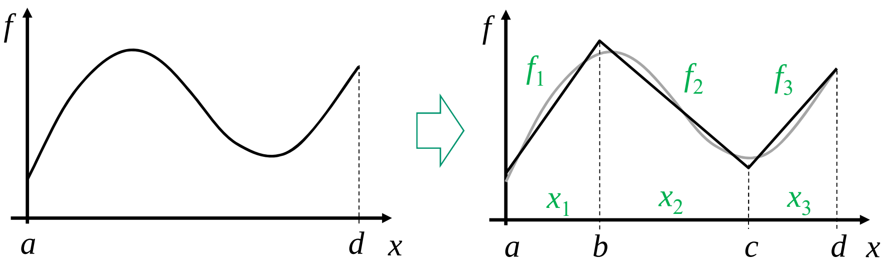
PQI-5884 - Programação Inteira Mista aplicada à Otimização de Processos
3º Período 2023

Data	Atividade	Conteúdo
14/set	Aula 1	Introdução, formulação, classes, representação
21/set	Aula 2	Condições de otimalidade
28/set	Aula 3	Condições KKT, multiplicadores
06/out*	Aula 4	Otimização irrestrita
19/out	Aula 5	LP
26/out	Aula 6	NLP
09/out	Aula 7	MILP
17/nov*	Aula 8	MILP, problemas clássicos
23/nov	**Aula 9**	**MILP, problema de scheduling**
30/nov	Aula 10	MINLP, problema de síntese
07/dez	-	Apresentações

LINEARIZAÇÃO DE PROBLEMAS NLP OU MINLP (pag.248)



Modelagem linear:

$$f = f_1 + f_2 + f_3$$
$$f_1 = \alpha_1.y_1 + \beta_1.x_1$$
$$f_2 = \alpha_2.y_2 + \beta_2.x_2$$
$$f_3 = \alpha_3.y_3 + \beta_3.x_3$$

$$x = x_1 + x_2 + x_3$$
$$a.y_1 \le x_1 \le b.y_1$$
$$b.y_2 \le x_2 \le c.y_2$$
$$c.y_3 \le x_3 \le d.y_3$$
$$y_1 + y_2 + y_3 = 1$$

Identificação de Configurações quase ótimas (pag.245)

Introduzir uma restrição que torne inviável a combinação ótima $\underline{y}^*$ e resolver o problema novamente

Solução ótima do MILP: $\underline{y}^* = [1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ \ldots\ ]^T$

$i \in B \,/\, y_i^* = 1$

$i \in N \,/\, y_i^* = 0$

a) Remover pelo menos um elemento do conjunto B

$$\sum_{i \in B} y^i \leq |B| - 1$$

b) Eliminar apenas a solução atual

$$\sum_{i \in B} y^i - \sum_{i \in N} y^i \leq |B| - 1$$

Exemplo: $\underline{y}^* = [1\ 0\ 1\ 0]^T$

$B = \{1, 3\}$ $\quad |B| = 2$

$N = \{2, 4\}$ $\quad |N| = 2$

Caso (a): $y_1 + y_3 \leq 1$

Torna inviável: $[1\ 0\ 1\ 0]^T$, $[1\ 1\ 1\ 0]^T$, $[1\ 0\ 1\ 1]^T$, e $[1\ 1\ 1\ 1]^T$.

Caso (b): $y_1 + y_3 - y_2 - y_4 \leq 1$

Torna inviável: $[1\ 0\ 1\ 0]^T$

A escolha da estratégia vai depender do tipo do problema.

Síntese de Sequência de Destilação (pag.256)

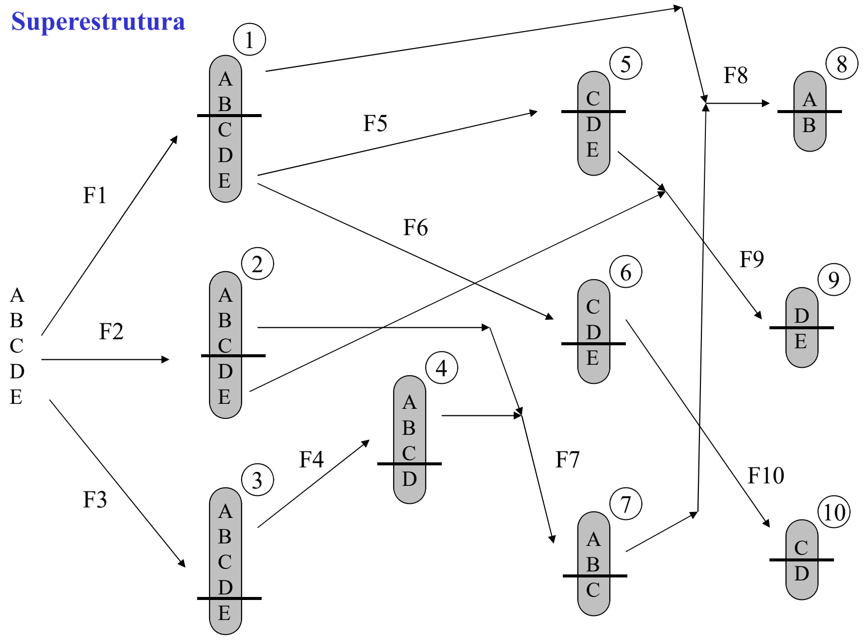
Separar uma mistura de cinco componentes: A, B, C, D e E.

Alimentação: 1.250 kmol/h com 10% de A, 15% de B, 20% de C, 20% de D e 35% de E.

O custo variável do vapor é de 32 $/MW.ano e da água de resfriamento é 2,0 $/MW.ano.

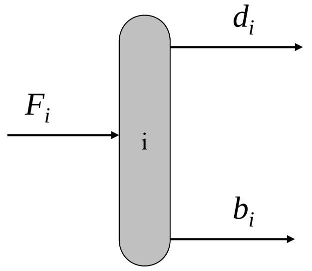
Separador	Custo fixo amortizado, α ($/ano)	Custo variável, β ($/(kmol/h).ano)	Coeficiente de carga térmica, *K* (MW/(kmol/h))
AB / CDE	119 000	320	39
ABC / DE	97 000	234	24
ABCD / E	45 000	77	44
ABC / D	50 000	91	33
C / DE	88 000	110	28
CD / E	42 000	100	47
AB / C	75 000	167	36
A / B	105 000	275	42
D / E	35 000	90	54
C / D	61 000	144	21

Superestrutura



6

Modelagem das colunas de separação (separação completa)



$$d_i = \gamma_i \,.\, F_i$$

$$b_i = (1 - \gamma_i).\, F_i$$

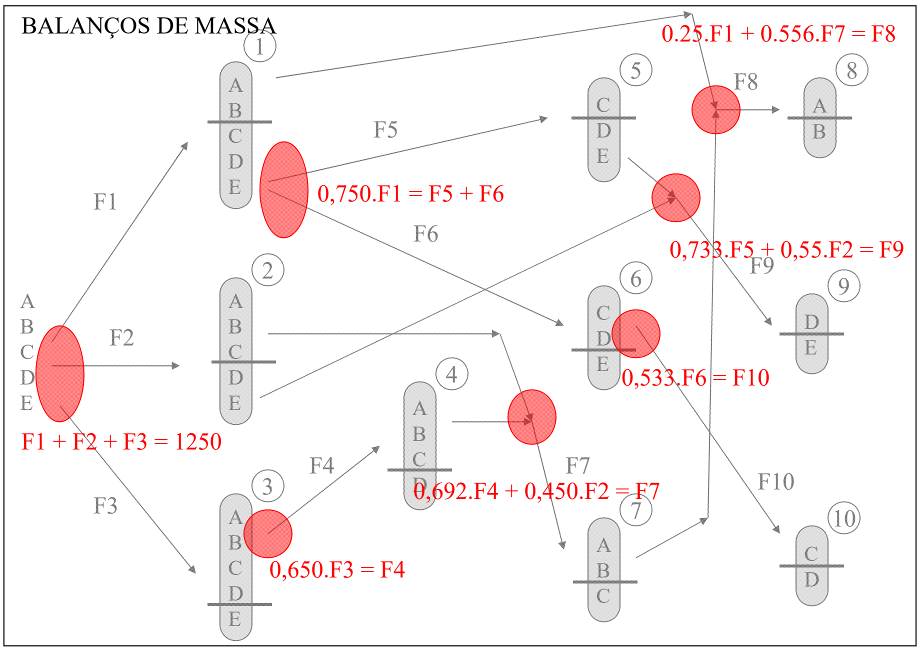
γ_i = fração de recuperação

y_i = 1 se a coluna é usada
0 c.c.

Alimentação:

$x_A = 0{,}10$ $\quad x_D = 0{,}20$
$x_B = 0{,}15$ $\quad x_E = 0{,}35$
$x_C = 0{,}20$

7



8

Balanços de massa:

F1 + F2 + F3 = 1250
0,750.F1 = F5 + F6
0,650.F3 = F4
0,692.F4 + 0,450.F2 = F7
0,533.F6 = F10
0,733.F5 + 0,55.F2 = F9
0.25.F1 + 0.556.F7 = F8

Vazões de alimentação:

$F_i \geq 0$
$F_i \leq 1500.y_i$ *(big M)*

Custo:

$C = \Sigma\, (\alpha_i.y_i + \beta_i.F_i) \;+\; (32 + 2)\,.\,\Sigma\, K_i.F_i$

fixo variável vapor água coef. carga

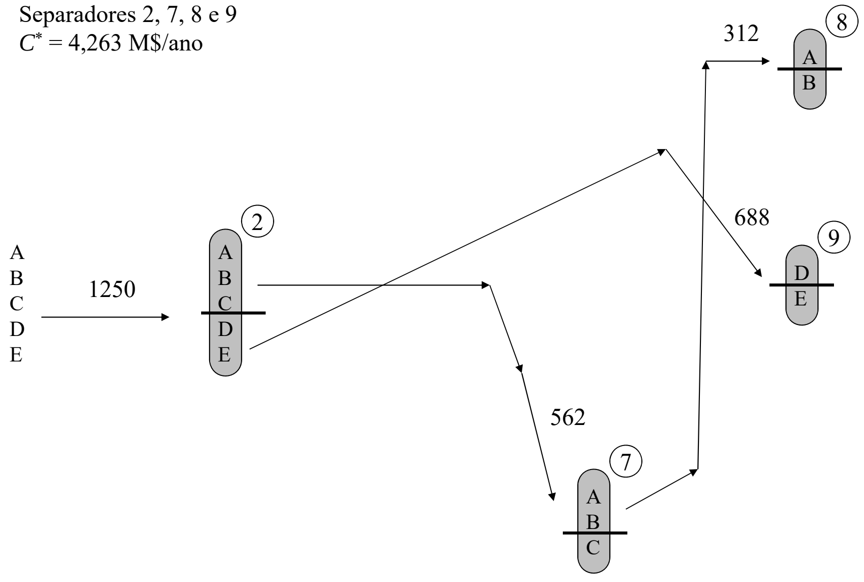
9

Modelo MILP:

$$\min \quad C = \sum_i \left(\alpha_i.y_i + \beta_i.F_i\right) + (32+2).\sum_i K_i.F_i$$

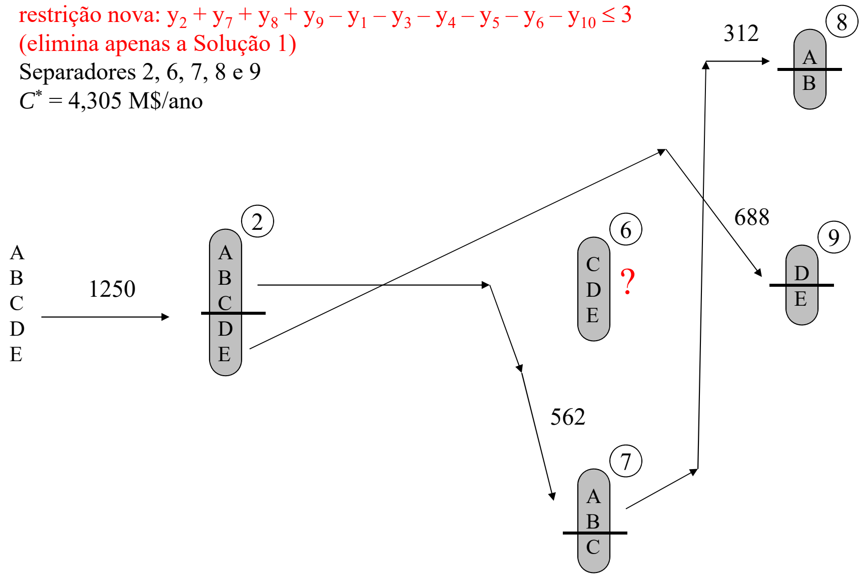
$$\text{s.a.:} \quad \begin{aligned}
&F_1 + F_2 + F_3 - 1250 = 0 \\
&0{,}750.F_1 - F_5 - F_6 = 0 \\
&0{,}650.F_3 - F_4 = 0 \\
&0{,}692.F_4 - 0{,}450.F_2 - F_7 = 0 \\
&0{,}533.F_6 - F_{10} = 0 \\
&0{,}733.F_5 + 0{,}55.F_2 - F_9 = 0 \\
&0.250.F_1 + 0.556.F_7 - F_8 = 0 \\
&0 \leq F_i \leq 1500.y_i \qquad \forall\, i \\
&F_i \in \Re \\
&y_i \in \{0,1\}
\end{aligned}$$

Solução 1:
Separadores 2, 7, 8 e 9
C^{*} = 4,263 M$/ano



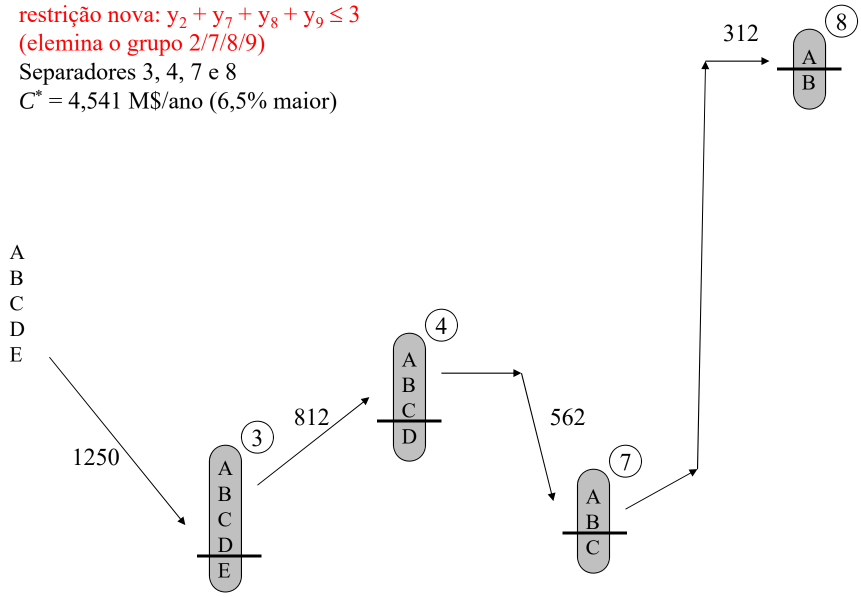
11

Solução 2A:
restrição nova: $y_2 + y_7 + y_8 + y_9 - y_1 - y_3 - y_4 - y_5 - y_6 - y_{10} \leq 3$
(elimina apenas a Solução 1)
Separadores 2, 6, 7, 8 e 9
C^{*} = 4,305 M$/ano

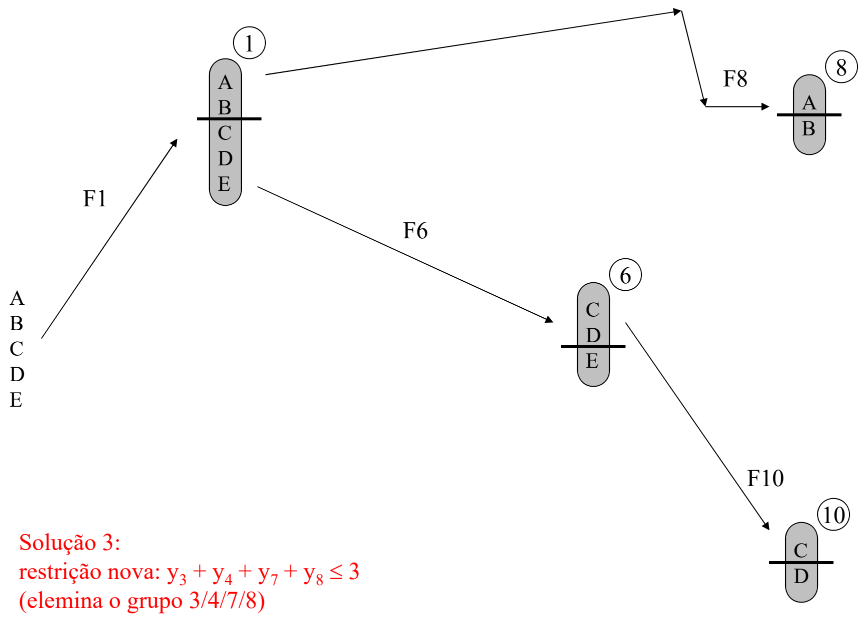


12

Solução 2B:
restrição nova: $y_2 + y_7 + y_8 + y_9 \leq 3$
(elemina o grupo 2/7/8/9)
Separadores 3, 4, 7 e 8
C^* = 4,541 M\$/ano (6,5% maior)



13



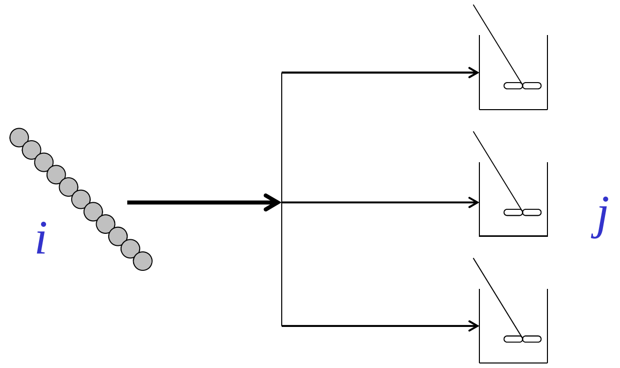
Solução 3:
restrição nova: $y_3 + y_4 + y_7 + y_8 \leq 3$
(elemina o grupo 3/4/7/8)
Separadores 1, 6, 8, 10
C^* = 4,953 M\$/ano

14

Caso MILP: Programação de produção em unidades de batelada (pag.262)

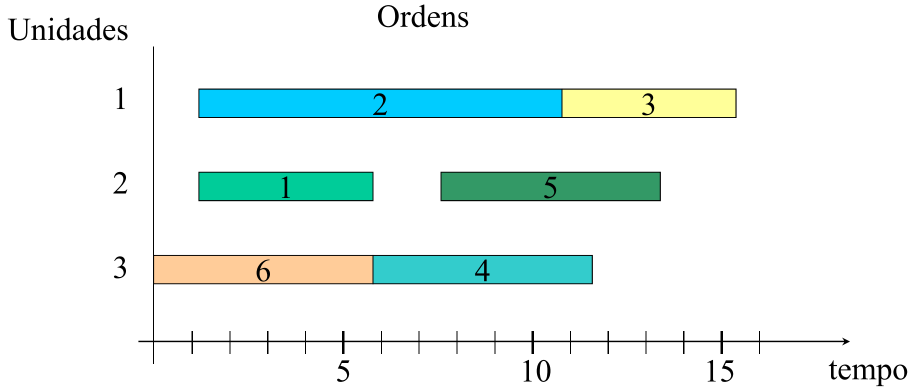
Mendez, Henning, Cerdá (2000)

Objetivo: Sequenciamento de *n* ordens de produção em uma planta multiproduto com *m* unidades em batelada



Unidades em paralelo
Estágio único de produção

Objetivo: Diagrama de Gantt



Variáveis binárias de decisão:

WF_{ij} ordem i é a primeira processada na unidade j

W_{ij} ordem i é processada na unidade j e não é a 1ª

$X_{ii'}$ ordem i' é processada logo após ordem i

Variáveis reais de decisão:

C_i instante de conclusão da ordem i

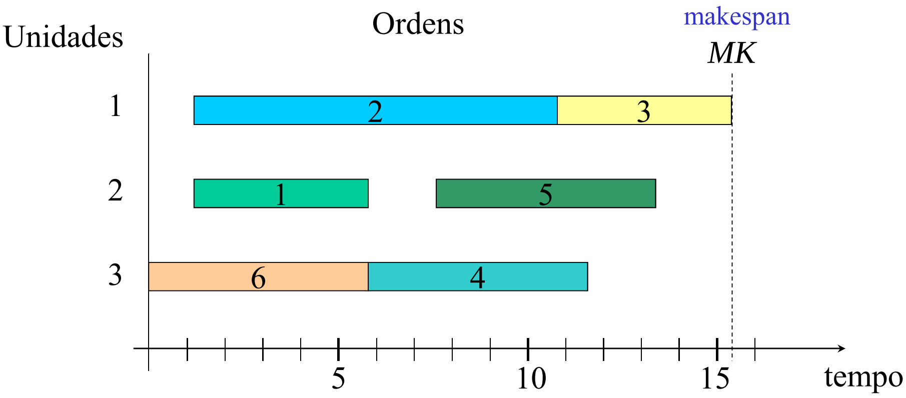
Parâmetros:

t_{ij} tempo de processamento de i na unidade j

$s_{ii'}$ tempo de preparação para processar i' após i

d_i data para entrega da ordem i

Exemplo:



Variáveis binárias verdadeiras:

WF_{21}, WF_{12}, WF_{63}

W_{31}, W_{52}, W_{43}

X_{23}, X_{15}, X_{64}

Variáveis reais

$C_1 = 5,8$ $\quad C_2 = 10,9$

$C_3 = 15,3$ $\quad C_4 = 11,6$

$C_5 = 13,3$ $\quad C_6 = 5,8$

Informações sobre incompatibilidades

Define-se como FS o grupo de sequências que não podem ser feitas.

$X_{ii'} = 0$ para $(i,i') \in FS$ (1)

Define-se como FP o grupo das alocações proibidas de ordem i em unidade j.

$WF_{ij} + W_{ij} = 0$ para $(i,j) \in FP$ (2)

Modelagem

Cada ordem i deve ser alocada a uma única unidade de processamento j :

$$\sum_j WF_{ij} + \sum_j W_{ij} = 1 \qquad \forall \text{ ordem } i \qquad (3)$$

Uma ordem, e sua sucessora direta, devem ser processadas na mesma unidade. Sempre que a ordem i for sucedida pela ordem i' ($X_{ii'} = 1$), ambas devem ser processadas na mesma unidade:

$$\lfloor (WF_{ij} \vee W_{ij}) \wedge X_{ii'} \rfloor \Rightarrow W_{i'j} \qquad (4)$$

$$WF_{ij} + W_{ij} \leq W_{i'j} + 1 - X_{ii'} \qquad \forall\, j,\, (ii') \qquad (5)$$

Cada unidade j só pode ter no máximo uma ordem inicial:

$$\sum_i WF_{ij} \leq 1 \qquad \forall \text{ unidade } j \qquad (6)$$

Toda ordem deve: ser a primeira a ser processada, ou então ser precedida por outra ordem na sequência:

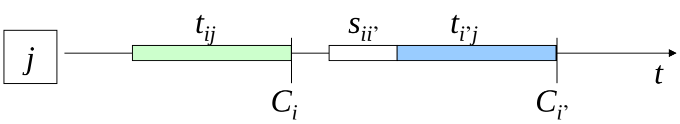
$$\sum_j WF_{i'j} + \sum_i X_{ii'} = 1 \qquad \forall \text{ ordem } i' \qquad (7)$$

Toda ordem i deve ser sucedida por no máximo uma ordem na sequência de processamento:

$$\sum_{i'} X_{ii'} \leq 1 \qquad \forall \text{ ordem } i \qquad (8)$$

Uma ordem i' só pode ser processada após a conclusão da ordem anterior i

$$C_{i'} \geq C_i + \left[\sum_j \left(s_{ii'} + t_{i'j} \right) W_{i'j} \right] + M\left(X_{ii'} - 1 \right) \qquad \forall\ (i, i') \qquad (9)$$



O processamento da ordem *i* na unidade *j* só pode ser iniciada se as duas estiverem disponíveis:

$$C_i \geq \sum_j \left(\max\{ru_j, ro_i\} + t_{ij}\right) \cdot \left(WF_{ij} + W_{ij}\right) \quad \forall \text{ ordem } i \qquad (10)$$

Parâmetros adicionais:

ro_i instante de liberação da ordem *i*

ru_j instante de liberação da unidade *j*

Medidas de desempenho

1) Adiantamento da ordem:

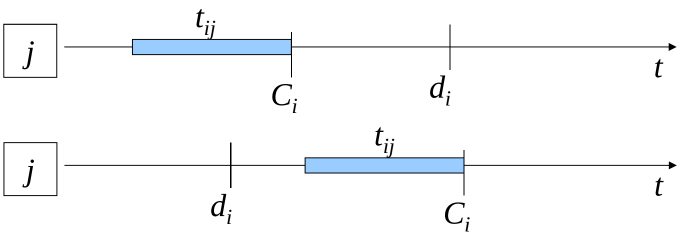
$$E_i \geq d_i - C_i \qquad \forall\ i \qquad (11)$$

2) Atraso da ordem:

$$T_i \geq C_i - d_i \qquad \forall\ i \qquad (12)$$

d_i = data de entrega da ordem *i* (parâmetro)

C_i = instante de conclusão da ordem *i*



3) Número de atrasos:

$T_i \leq M \,.\, NT_i \qquad \forall\, i \qquad (13)$

M = parâmetro big M

NT_i = variável binária para existência de atraso na ordem i

4) Makespan (MK)

$MK \geq C_i \qquad \forall\, i \qquad (14)$

Funções objetivo

1) Minimização do adiantamento ponderado

$$\text{Min} \ \sum_i p_i E_i \qquad (15)$$

2) Minimização do atraso ponderado

$$\text{Min} \ \sum_i p_i T_i \qquad (16)$$

p_i = peso da ordem i

Funções objetivo

3) Minimização do número de ordens atrasadas:

$$\text{Min } \sum_i NT_i \qquad (17)$$

4) Minimização de desvios ponderados: este objetivo visa manter valores razoáveis de adiantamento e estoque intermediário.

$$\text{Min } \sum_i p_i \cdot \left(\frac{E_i}{n+1} + T_i \right) \qquad (18)$$

5) Minimização do makespan

$$\text{Min } MK \qquad (19)$$

$$MK \geq C_i \qquad \forall\, i \longrightarrow MK = \max\{C_i\}$$

EM RESUMO

Variáveis

C_i	instante de conclusão da ordem i (dias)
E_i	adiantamento da ordem i (dias)
T_i	atrasado da ordem i (dias)
MK	tempo total de conclusão das ordens, *makespan* (dias)
WF_{ij}	binária, vale 1 se a ordem i é a primeira a ser processada na unidade j
W_{ij}	binária, vale 1 se a ordem i é processada na unidade j, não sendo a primeira
$X_{ii'}$	binária, vale 1 se a ordem i' é processada após a ordem i na mesma unidade
NT_i	binária, vale 1 se a ordem i está atrasada

Parâmetros

n	número de ordens
m	número de unidades
t_{ij}	tempo de processamento da ordem i na unidade j (dias)
d_i	data para entrega da ordem i (dias)
M	parâmetro big-M (dias)
p_i	peso relativo da ordem i (prioridade)
ro_i	tempo para liberação da ordem i (dias)
ru_j	tempo para liberação da unidade j para a programação(dias)
$s_{ii'}$	tempo de *setup* para processar a ordem i' após a ordem i (dias)

Exemplo Numérico

Ordem i	Tempo para liberação (dias)	Data de entrega (dias)	Tempo de processamento na unidade 1 (dias)	Tempo de processamento na unidade 2 (dias)	Peso p_i
1	0,0	14	6,8	6,1	1
2	5,0	14	7,0	7,0	1
3	0,0	21	5,0	X	1
4	6,0	14	X	5,1	2
5	0,0	21	4,9	5,6	1

Setup

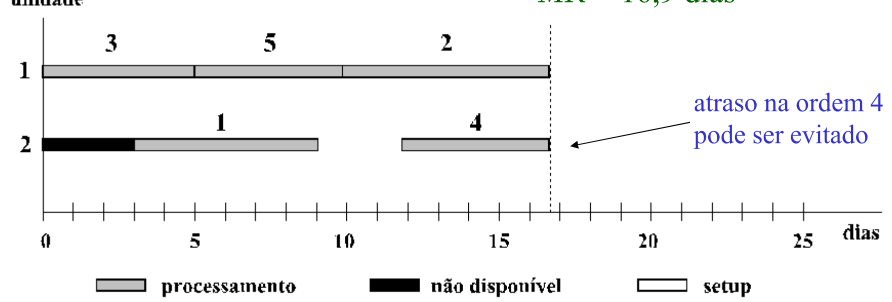
$i \rightarrow i'$	1	2	3	4	5
1	-		X		X
2	X	-	1,1		0,7
3	1,0	0,15	-		
4		X		-	X
5	1,4			0,3	-

Unidades:
1) $r_{u1} = 0$ dias
2) $r_{u2} = 3$ dias

Minimização do Makespan

Unidade	Ordem	Tempo de proces. (dias)	Tempo de setup (dias)	Início da ordem (dias)	Final da ordem (dias)	Data de entrega (dias)	Atraso (dias)	Adiant. (dias)
1	3	5,0	-	0,0	5,0	21	-	16,0
	5	4,9	0	5,0	9,9	21	-	11,1
	2	7,0	0	9,9	16,9	14	2,9	-
2	1	6,1	-	3,0	9,1	14	-	4,9
	4	5,1	0	11,8	16,9*	14	2,9	-

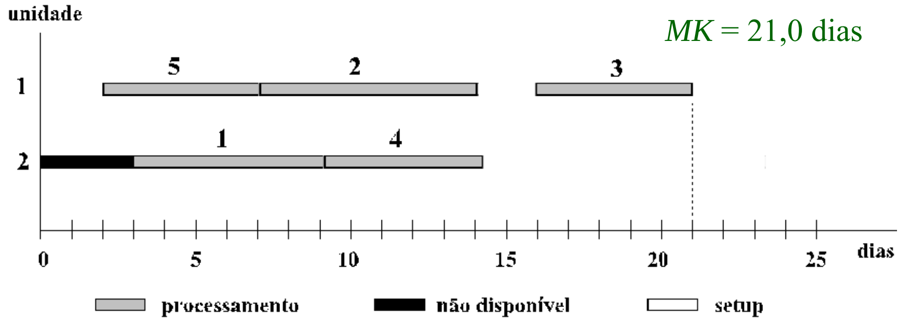
$MK = 16,9$ dias



desvio = 14,0 dias

Minimização do Desvio

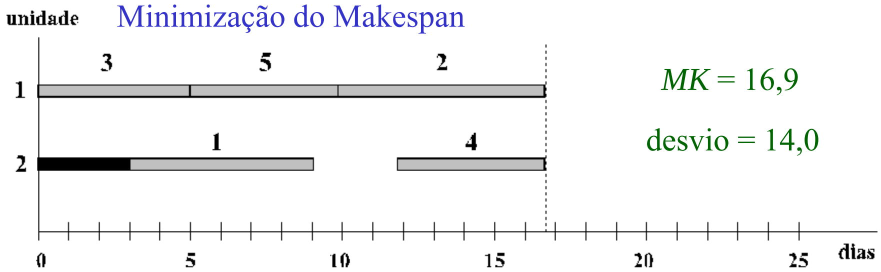
Unidade	Ordem	Data de entrega	Atraso
1	5	21	–14
	2	14	0
	3	21	0
2	1	14	–4,9
	4	14	+0,2



MK = 21,0 dias

desvio = 3,56

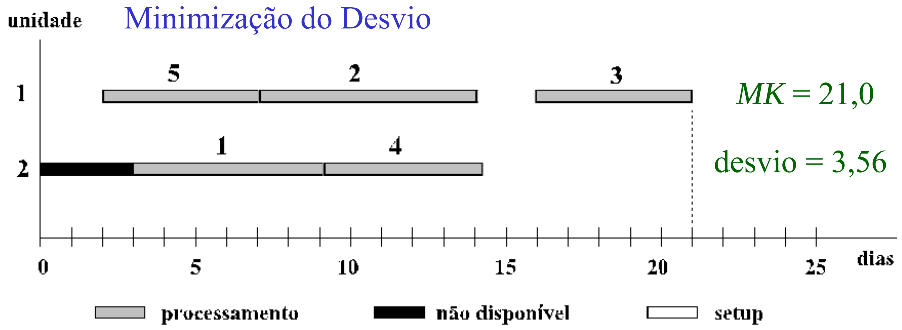
Minimização do Makespan



MK = 16,9

desvio = 14,0

Minimização do Desvio



MK = 21,0

desvio = 3,56