

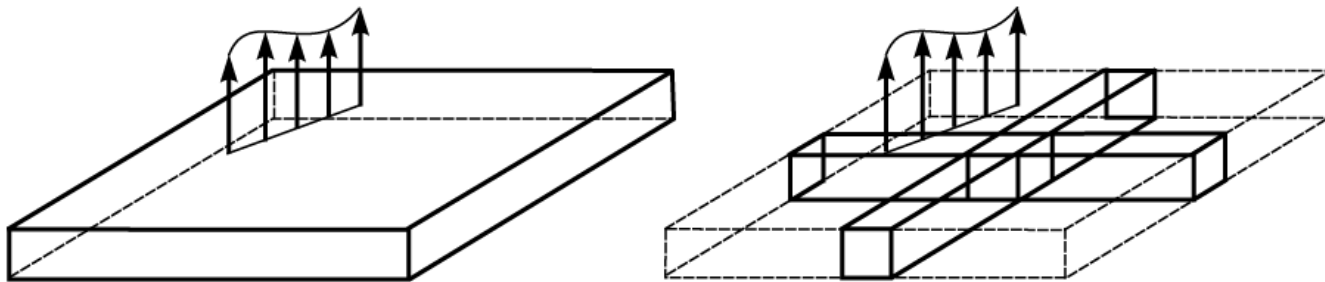
Teoria de Placas de Kirchhoff

Descrição básica

Geometria: placa delgada e com um carregamento atuando transversalmente à superfície média dessa placa.

Comportamento de flexão:

A flexão de uma placa que resiste à carga transversal pode ser interpretada de forma simplificada por meio de barras que se dispõem ortogonalmente uma à outra.

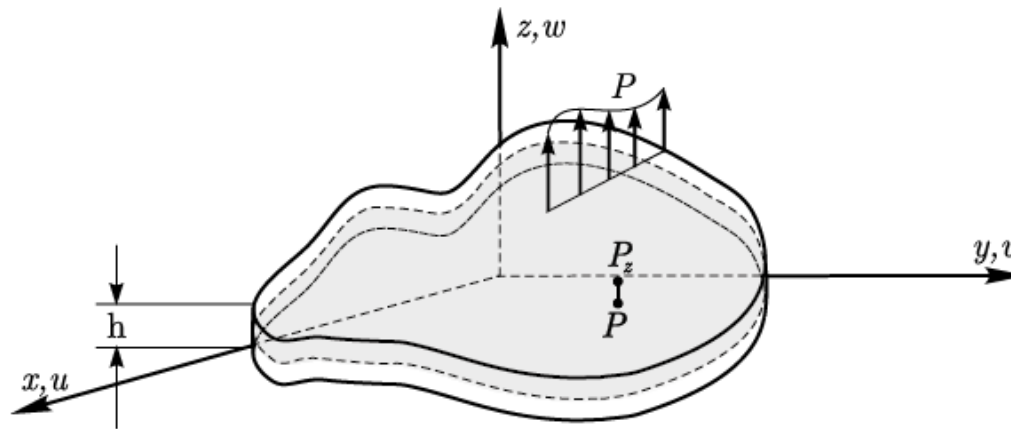


Modelo de Placa de Kirchhoff

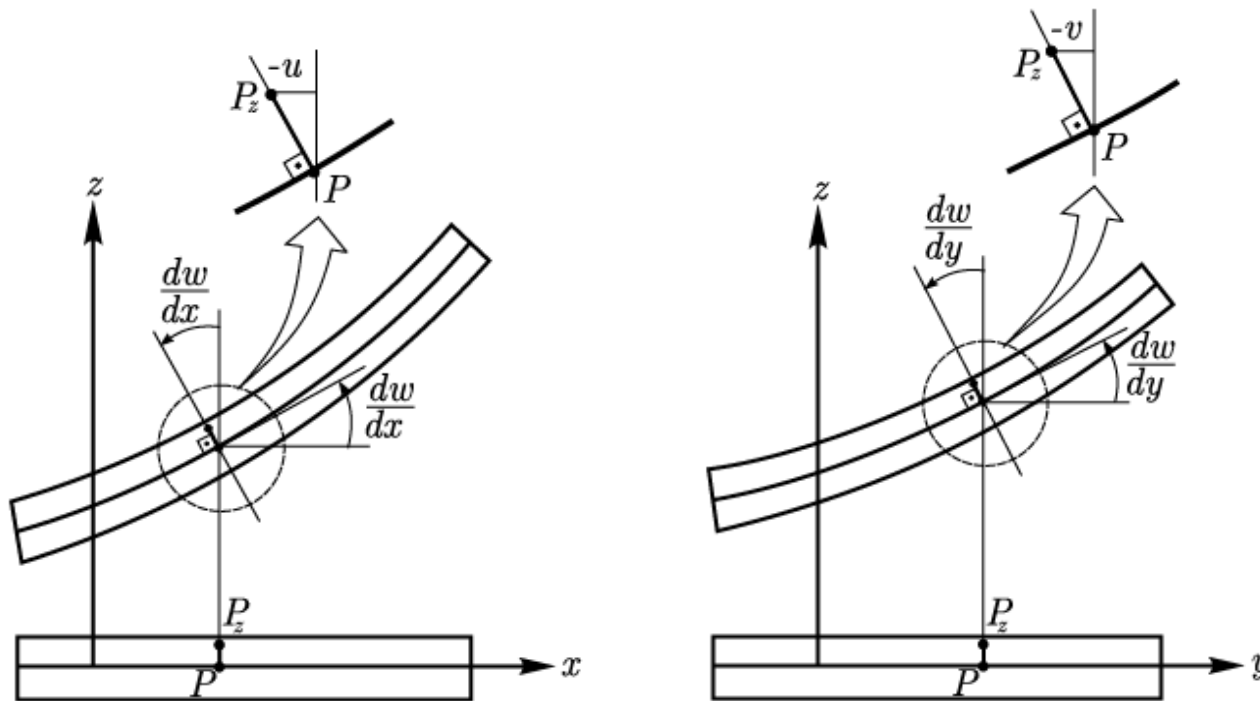
Cinemática:

- Fibras retilíneas inicialmente ortogonais à superfície média da placa permanecem retilíneas e ortogonais à superfície média após a deformação
- Os deslocamentos na direção transversal não variam ao longo da espessura da placa

- P é um ponto da superfície média de coordenadas $(x, y, 0)$
- P_z é um ponto que se encontra numa fibra retilínea que é ortogonal à superfície média e passa por P , de coordenadas (x, y, z) .
- O carregamento $p(x, y)$ atua transversalmente à placa
- A espessura h é pequena quando comparada a uma dimensão característica no plano da placa



Representações das configurações deformadas e indeformadas da placa nos planos xz e yz , respectivamente:



Considerando essas definições e pequenos deslocamentos, tem-se:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$w = w(x, y)$$

Usando as relações de compatibilidade:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

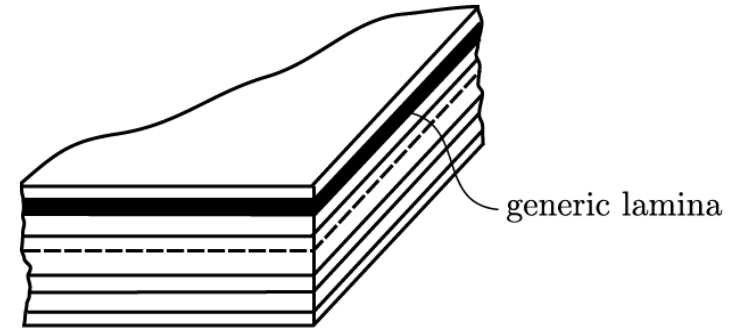
$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

sendo as outras componentes nulas.

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Equação constitutiva:

- A teoria assume que a placa é composta por uma “pilha” de lâminas;
- Cada lâmina está sujeita ao estado plano de tensão.



Portanto:

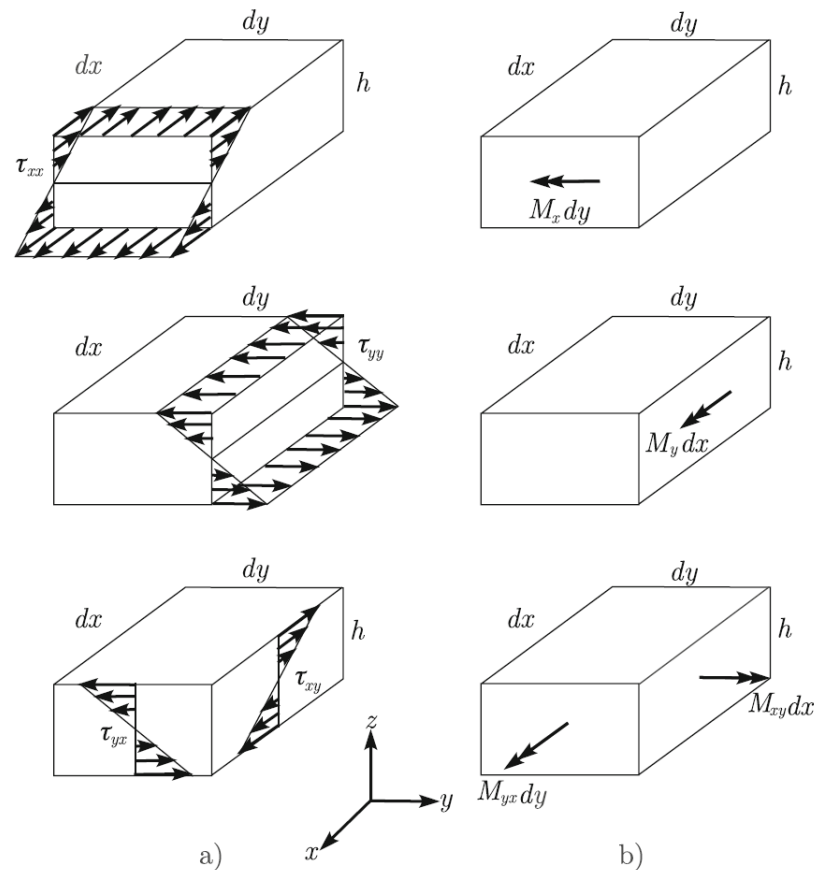
$$\tau_{xx} = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy}) = -\frac{Ez}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$\tau_{yy} = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{xx}) = -\frac{Ez}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{xy} = -\frac{Ez}{(1 + \nu)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$$

Esforços solicitantes (por unidade de comprimento):

Nas figuras abaixo, observam-se as distribuições de tensões quando as curvaturas são positivas: $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ e $\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$



- Podem-se definir esforços solicitantes (por unidade de comprimento)
- Resultante de momento M_x associada à componente τ_{xx} :

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xx}(-z)dz$$

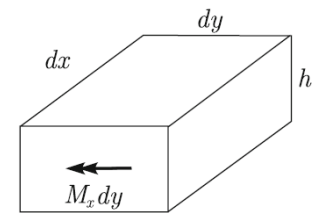
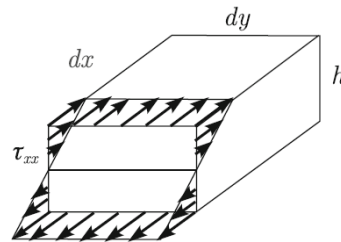
$$M_x = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

Definindo D :

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

Tem-se:

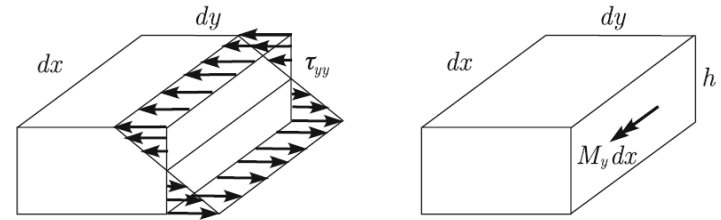
$$M_x = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$



- Resultante de momento M_y associada à componente τ_{yy} :

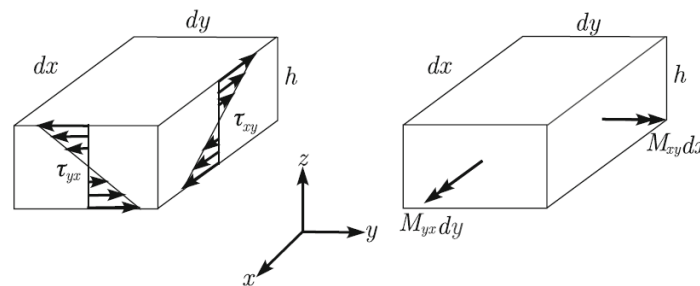
$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yy}(-z)dz$$

$$M_y = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$



- Momento de torção por unidade de comprimento M_{yx} :

$$M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx}(-z)dz = D(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$$

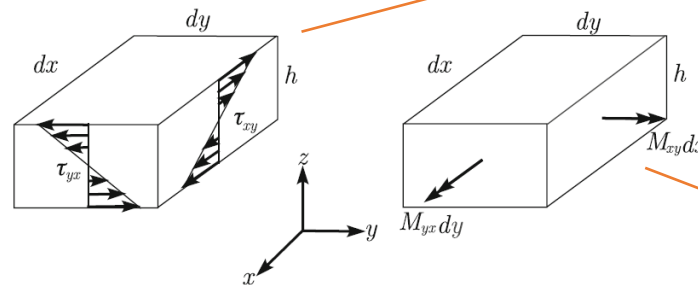


- Momento de torção por unidade de comprimento M_{xy} :

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz = -D(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$$

- Sendo $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ temos que $M_{xy} = -M_{yx}$

M_{xy} negativo



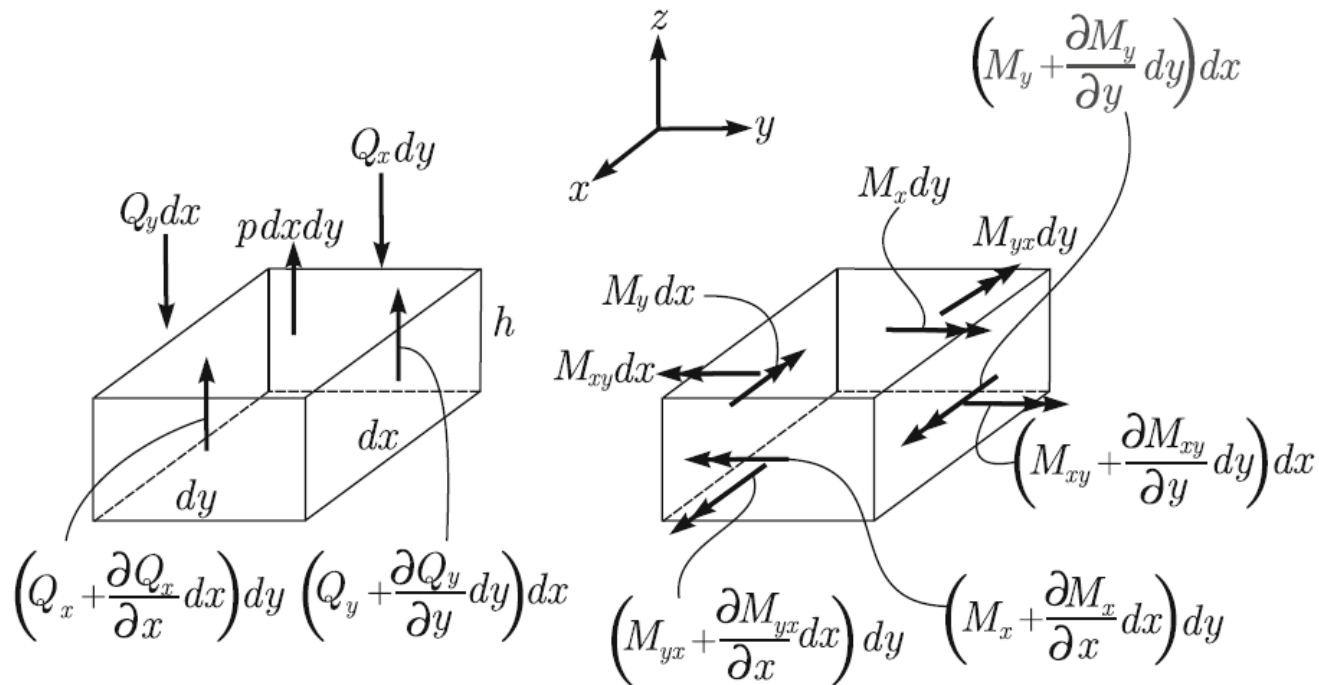
Para essas tensões M_{xy} é negativo!

Representação de M_{xy} positivo!

Obs: esse momento não existe em teoria de barras e é gerado por tensões de cisalhamento $\tau_{xy} = \tau_{yx}$

Equilíbrio:

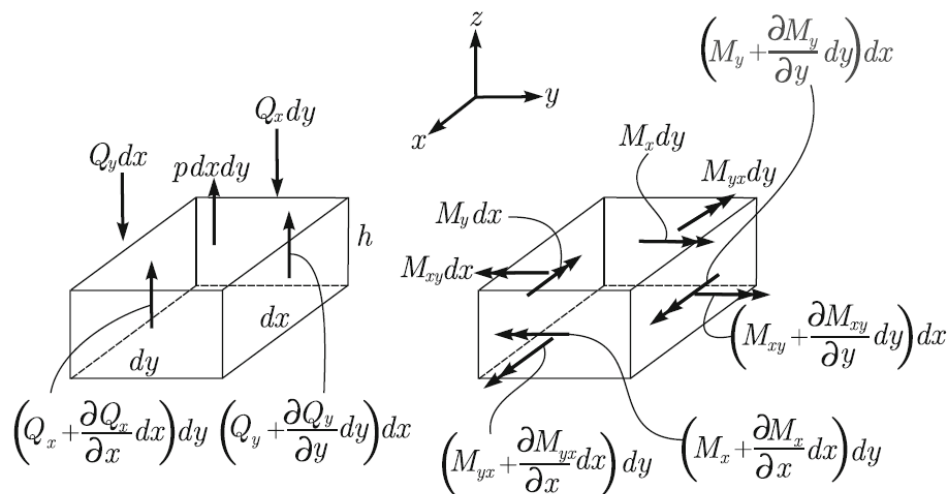
Esforços nas seções de um elemento infinitesimal de placa no plano xy



- Equilíbrio de forças na direção z:

$$-Q_x dy + \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy - Q_y dx + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx + p dx dy = 0$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -p \quad (1)$$



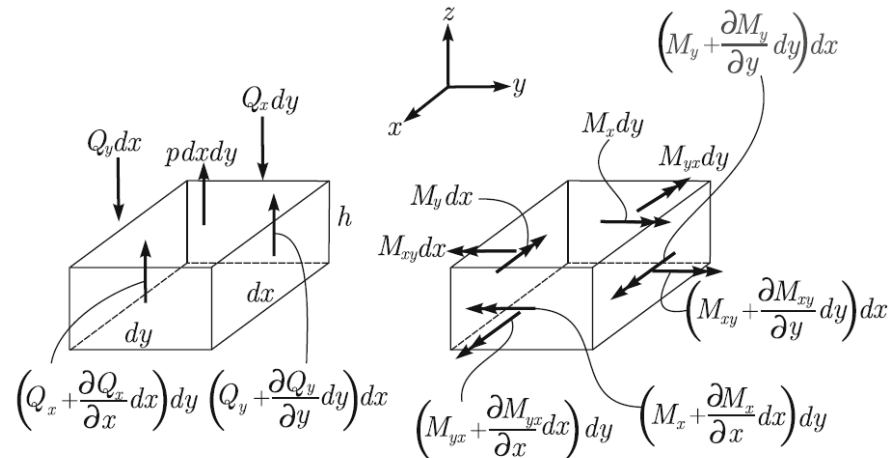
- Equilíbrio de momentos em torno de x:

$$(Q_y dx) dy - M_y dx + \left(M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy \right) dx - M_{yx} dy + \left(M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} dx \right) dy = 0$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} = -Q_y \quad (2)$$

- Equilíbrio de momentos em torno de y:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -Q_x \quad (3)$$



Formulação diferencial:

Derivando a equação (2) em relação a y e a equação (3) em relação a x , somando-as e usando a equação (1) chega-se a:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = p$$

Substituindo-se as expressões que relacionam os momentos aos deslocamentos transversais chega-se a:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D}$$

que é conhecida como a equação de Lagrange para as placas.

Substituindo as expressões que fornecem os momentos em função dos deslocamentos transversais nas equações (2) e (3), obtêm-se os esforços cortantes em termos dos deslocamentos:

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

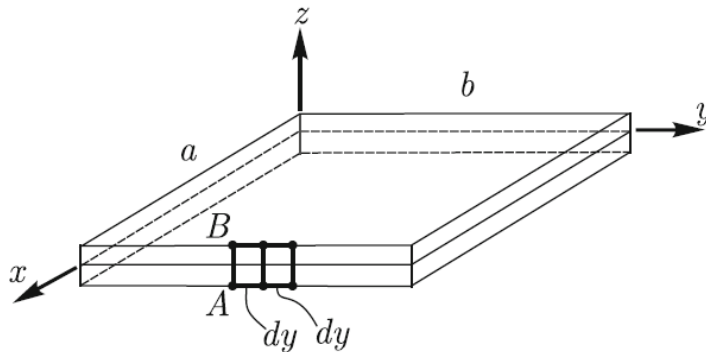
e

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

Condições de contorno:

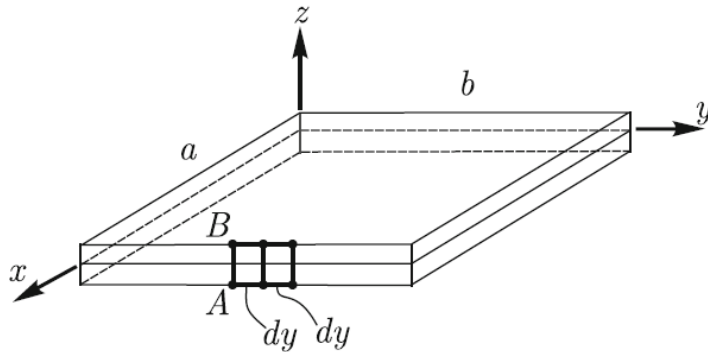
Considerando-se uma aresta paralela ao eixo y , dada por $x = a$.

- A condição de borda engastada corresponde a se impor que os deslocamentos transversais e as rotações das fibras em torno do eixo y são nulos.



$$w \Big|_{x=a} = 0$$
$$\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=a} = 0$$

- Considerando a condição simplesmente apoiada, o deslocamento transversal deve ser restringido. Adicionalmente não há vínculos cinemáticos que restrinjam as rotações de fibras em torno do eixo y , tais como \mathbf{AB} , e não há tensões normais τ_{xx} atuando na seção de extremidade da placa dada por $x = a$. Desta forma, em $x = a$, tem-se:



$$w \Big|_{x=a} = 0$$

$$M_x \Big|_{x=a} = 0$$

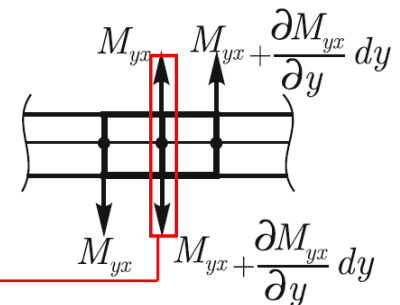
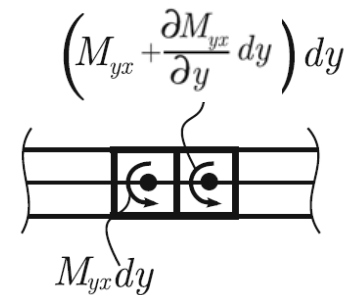
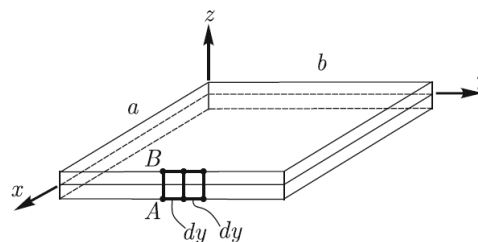
$$M_x = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \rightarrow \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \Big|_{x=a} = 0$$

$$\text{como } \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{x=a} = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=a} = 0$$

- A última condição a se considerar é a condição de borda livre.
- não existem restrições cinemáticas nesse caso
- não existem tensões que atuem sobre a seção da extremidade da placa definida por $x = a$.
- As componentes de tensão que **poderiam** agir são τ_{xx} , τ_{yx} e τ_{zx} . Essas componentes estão associadas com M_x , M_{yx} e Q_x

$$M_x \Big|_{x=a} = 0$$

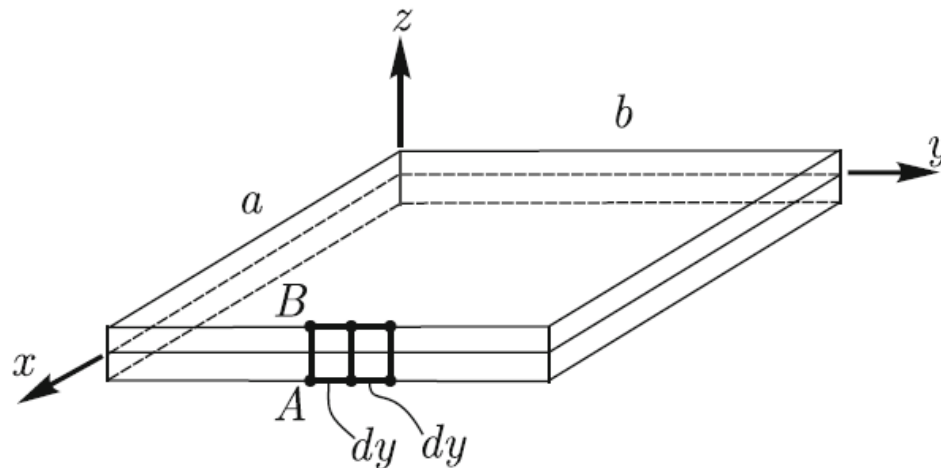
$$\left(Q_x - \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \right) \Big|_{x=a} = 0$$



Os efeitos de τ_{yx} (M_{yx}) e de τ_{zx} (Q_x) juntos compõem o equilíbrio do contorno em z

Exemplo

Encontrar a solução para uma placa retangular, quando a placa é simplesmente apoiada nas suas quatro bordas e atua sobre ela uma força $p = p(x, y)$ transversal. Particularizar a solução para $p(x, y) = p_0$ constante.



SOLUÇÃO: Tem-se as condições de contorno abaixo:

$$w \Big|_{x=0} = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0$$

$$w \Big|_{y=0} = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = 0$$

$$w \Big|_{x=a} = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=a} = 0$$

$$w \Big|_{y=b} = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=b} = 0$$

Buscando a solução a partir de uma série de *Fourier*:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right)$$

que atende as condições de contorno.

Buscam-se as constantes w_{mn} para que satisfaçam a equação:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D}$$

Para tal, o carregamento precisa ser caracterizado. Pode-se escrever (novamente usando-se a serie de *Fourier*):

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right)$$

Onde:

$$p_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x, y) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right) dx dy$$

Substituindo-se $w(x, y)$ e $p(x, y)$ em $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D}$,
chega-se a:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m^4}{a^4} + \frac{2m^2 n^2}{a^2 b^2} + \frac{n^4}{b^4} \right) \pi^4 w_{mn} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right) =$$
$$\frac{1}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right)$$

Como os coeficientes das duas séries têm que ser os mesmos, tem-se:

$$W_{mn} = \frac{p_{mn}}{\pi^4 D \left(\frac{m^4}{a^4} + \frac{2m^2n^2}{a^2b^2} + \frac{n^4}{b^4} \right)}$$

Quando o carregamento é uniforme e igual a p_0 , tem-se:

$$p_{mn} = \frac{16p_0}{\pi^2 mn}; m, n = 1, 3, 5, \dots$$

$$p_{mn} = 0; m, n = 2, 4, 6, \dots$$

Com todas essas relações, chega-se a:

$$w(x, y) = \frac{16p_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right)}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}$$

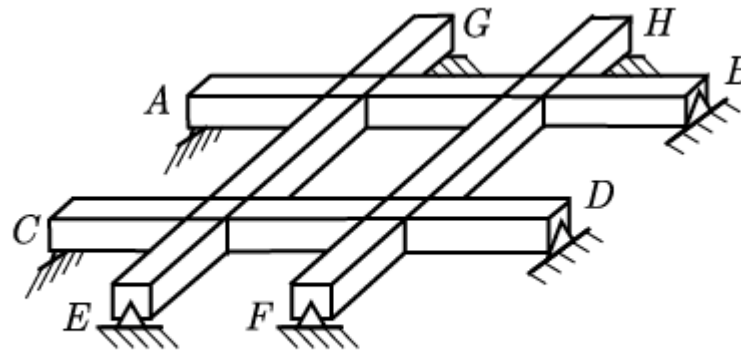
Com m e n ímpares. Portanto, tendo-se o campo de deslocamentos, pode-se obter os campos de tensões e os esforços resultantes.

Voltando ao comportamento da placa

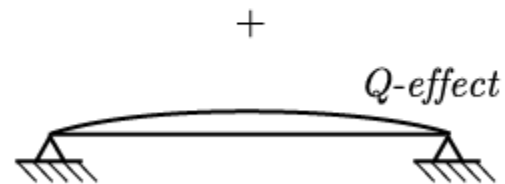
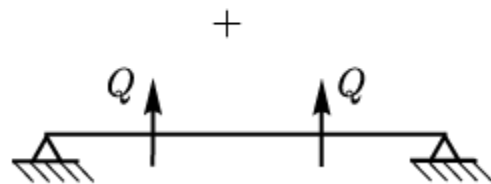
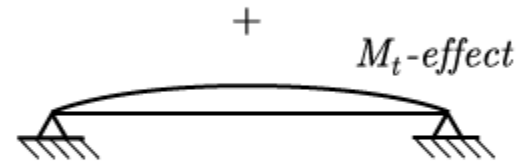
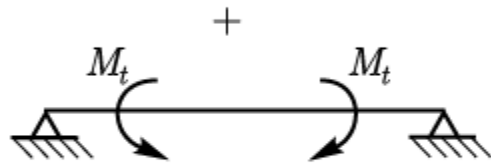
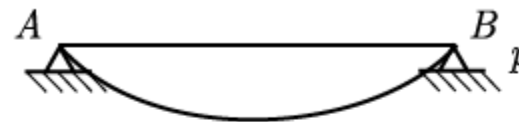
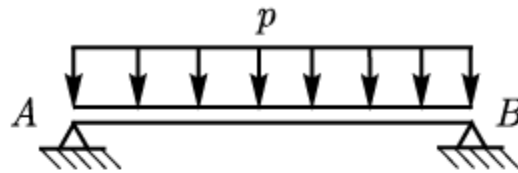
Considere uma placa retangular simplesmente apoiada. Pode-se buscar entendimento sobre o comportamento da placa a partir de barras de seção transversal retangular.

Considerando uma barra com eixo paralelo ao eixo x global, observa-se que além do momento M_x e da força Q_x que estão diretamente associados à flexão dessa barra, o momento de torção M_{xy} e a força Q_y – que atuam sobre as faces laterais – contribuem para o seu equilíbrio.

Este efeito é examinado abaixo num contexto simplificado de grelha.



a)



b)

c)

Referência

BUCALEM, M. L.; BATHE, K.-J. The mechanics of solids and structures: hierarchical modeling and the finite element solution, p.307-320. Heidelberg: Springer, 2011.