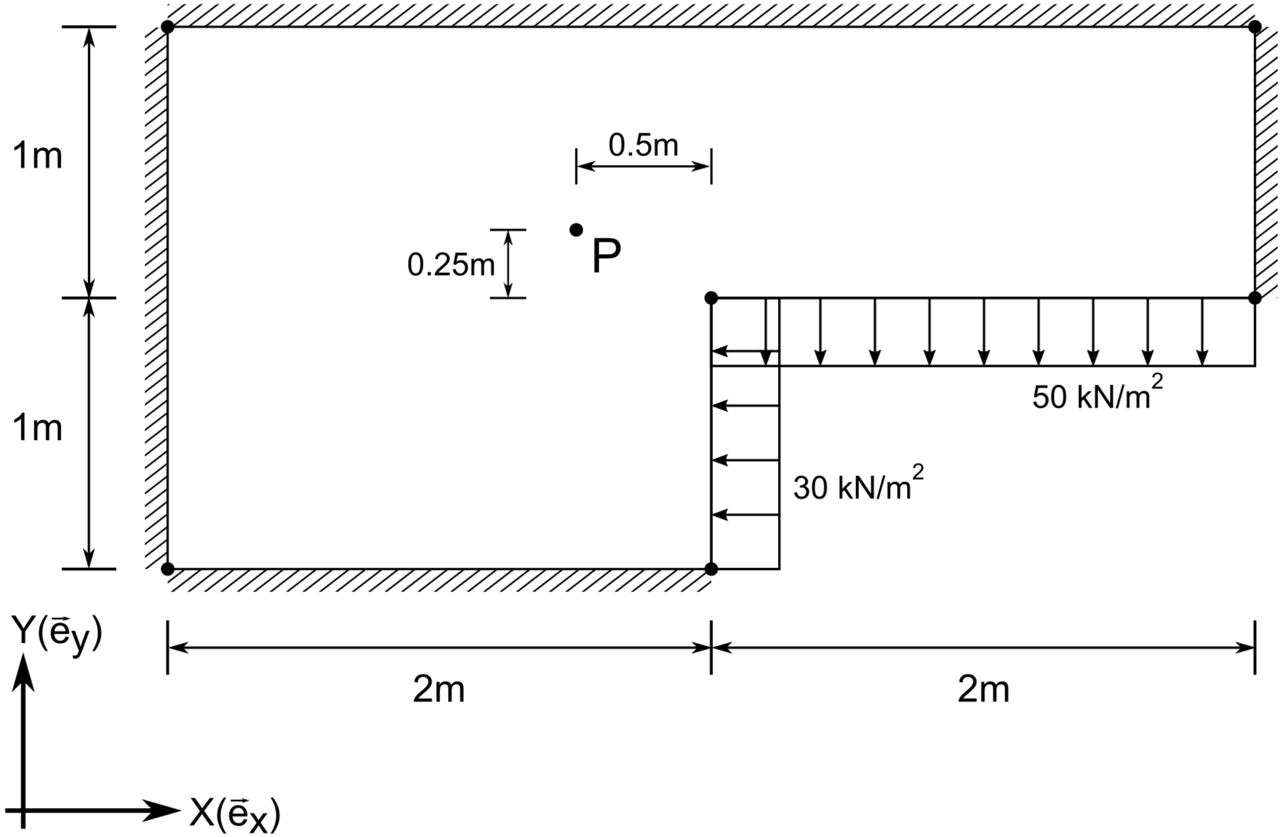
Questão com 3 Elementos

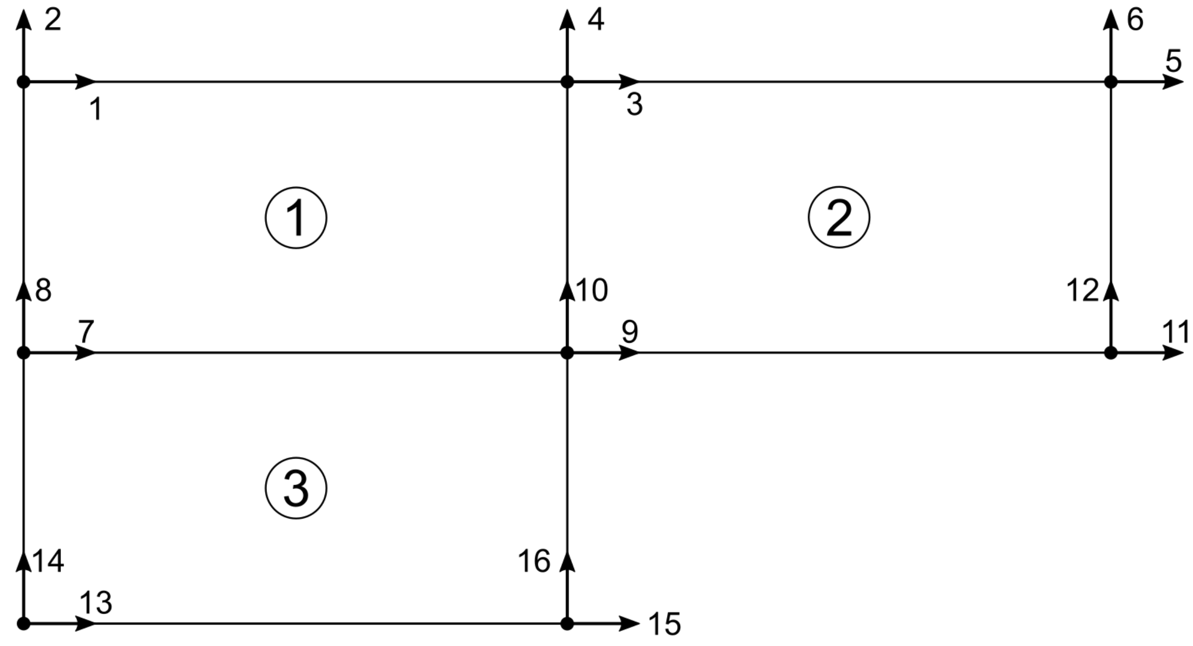
Enunciado

Considere a chapa sujeita aos carregamentos e restrições ilustrados abaixo, além de seu peso próprio ($\gamma = 30\ kN/m^3$) no sentido $-\vec{e}_y$.



Enunciado

Considere também a seguinte discretização em 3 elementos finitos



Pede-se:

a) Deslocamentos nodais;

b) Deslocamentos horizontal (u) e vertical (v) no ponto P indicado no elemento (1);

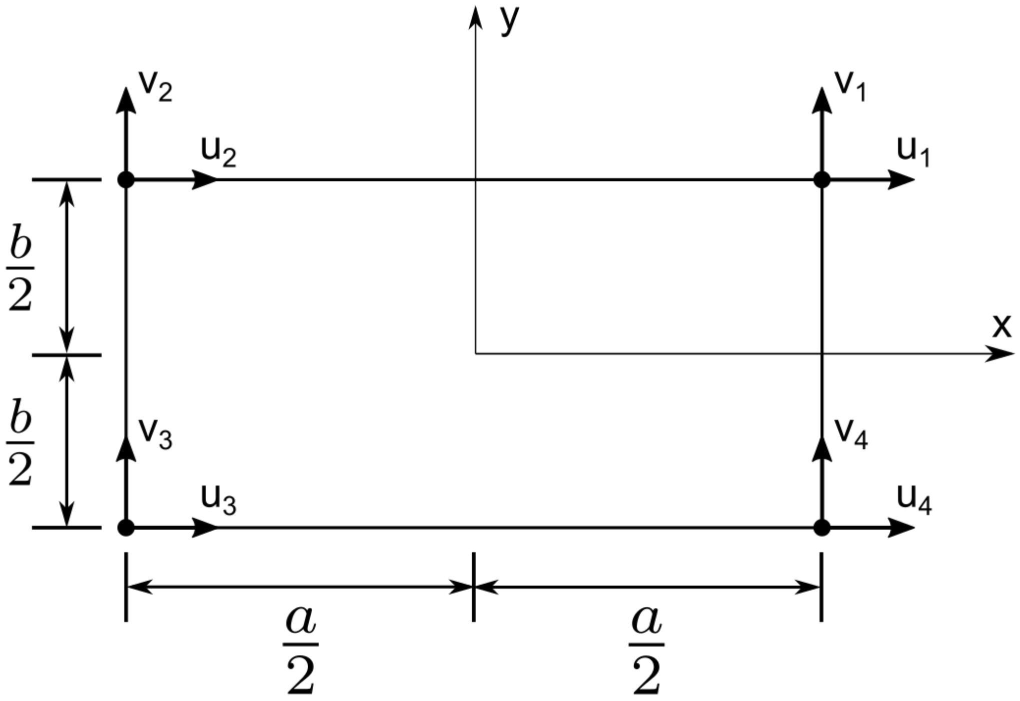
c) Deformações ε_{xx}, ε_{yy}, γ_{xy} no ponto P;

d) Tensões σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{xy} no ponto P;

e) Tensões principais no ponto P, no plano médio da chapa, bem como a caracterização da direção associada à <u>máxima tensão de tração</u> (apenas!).

Dados

Considere também o elemento em seu sistema local e suas funções de forma



$$h_1(x,y) = \frac{1}{4}(1+\frac{2x}{a})(1+\frac{2y}{b})$$

$$h_2(x,y) = \frac{1}{4}(1-\frac{2x}{a})(1+\frac{2y}{b})$$

$$h_3(x,y) = \frac{1}{4}(1-\frac{2x}{a})(1-\frac{2y}{b})$$

$$h_4(x,y) = \frac{1}{4}(1+\frac{2x}{a})(1-\frac{2y}{b})$$

Dados

Adotando $a = 2$ e $b = 1$ obtem-se a matriz de rigidez do elemento por unidade de espessura da chapa:

$$[k] = \begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 8.791 \times 10^6 & 3.571 \times 10^6 & -1.099 \times 10^6 & -2.747 \times 10^5 & -4.396 \times 10^6 & -3.571 \times 10^6 & -3.296 \times 10^6 & 2.747 \times 10^5 \\ 3.571 \times 10^6 & 1.593 \times 10^7 & 2.747 \times 10^5 & 6.043 \times 10^6 & -3.571 \times 10^6 & -7.967 \times 10^6 & -2.747 \times 10^5 & -1.401 \times 10^7 \\ -1.099 \times 10^6 & 2.747 \times 10^5 & 8.791 \times 10^6 & -3.571 \times 10^6 & -3.296 \times 10^6 & -2.747 \times 10^5 & -4.396 \times 10^6 & 3.571 \times 10^6 \\ -2.747 \times 10^5 & 6.043 \times 10^6 & -3.571 \times 10^6 & 1.593 \times 10^7 & 2.747 \times 10^5 & -1.401 \times 10^7 & 3.571 \times 10^6 & -7.967 \times 10^6 \\ -4.396 \times 10^6 & -3.571 \times 10^6 & -3.296 \times 10^6 & 2.747 \times 10^5 & 8.791 \times 10^6 & 3.571 \times 10^6 & -1.099 \times 10^6 & -2.747 \times 10^5 \\ -3.571 \times 10^6 & -7.967 \times 10^6 & -2.747 \times 10^5 & -1.401 \times 10^7 & 3.571 \times 10^6 & 1.593 \times 10^7 & 2.747 \times 10^5 & 6.043 \times 10^6 \\ -3.296 \times 10^6 & -2.747 \times 10^5 & -4.396 \times 10^6 & 3.571 \times 10^6 & -1.099 \times 10^6 & 2.747 \times 10^5 & 8.791 \times 10^6 & -3.571 \times 10^6 \\ 2.747 \times 10^5 & -1.401 \times 10^7 & 3.571 \times 10^6 & -7.967 \times 10^6 & -2.747 \times 10^5 & 6.043 \times 10^6 & -3.571 \times 10^6 & 1.593 \times 10^7 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{matrix}$$

E as seguintes informações adicionais:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

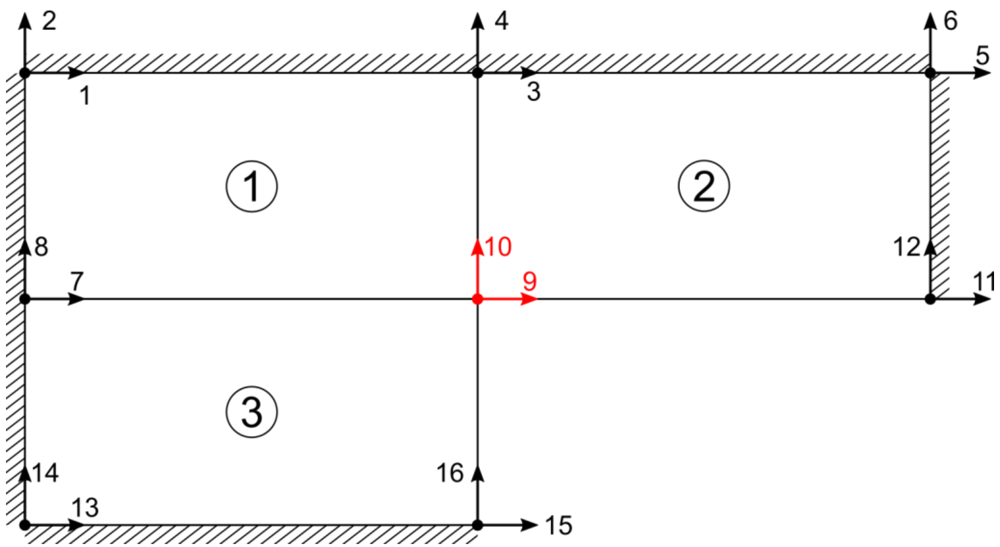
$$[C] = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$E = 2 \times 10^7 \; kN/m^2$$
$$\nu = 0.3$$

Item a) Deslocamentos nodais

- Os deslocamentos são a solução do sistema linear

$$[K]\{U\} = \{R\}$$



- Apenas dois graus de Liberdade estão livres

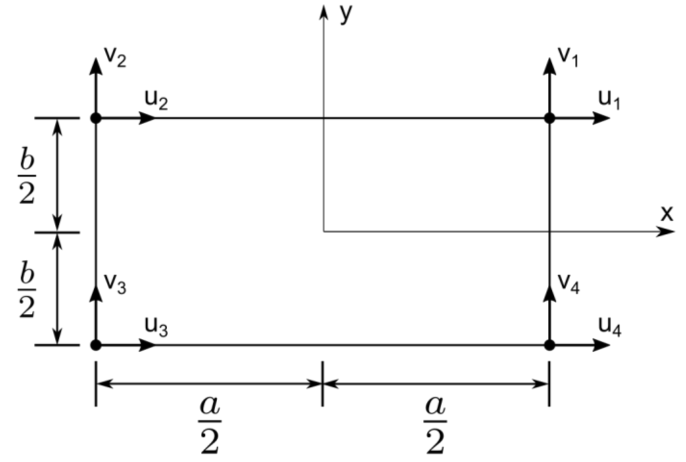
$$\begin{bmatrix} K_{9,9} & K_{9,10} \\ K_{10,9} & K_{10,10} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_9 \\ U_{10} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_9 \\ R_{10} \end{Bmatrix}$$

- Cada termo da matriz de rigidez recebe contribuições dos 3 elementos:

$$K_{9,9} = k_{7,7}^{(1)} + k_{5,5}^{(2)} + k_{1,1}^{(3)} = (8.791 + 8.791 + 8.791) \times 10^6 = 2.637 \times 10^7$$

$$K_{9,10} = K_{10,9} = k_{7,8}^{1} + k_{5,6}^{2} + k_{1,2}^{3} = (-3.571 + 3.571 + 3.571) \times 10^6 = 3.571 \times 10^6$$

$$K_{10,10} = k_{8,8}^{1} + k_{6,6}^{2} + k_{2,2}^{3} = (1.593 + 1.593 + 1.593) \times 10^7 = 4.780 \times 10^7$$



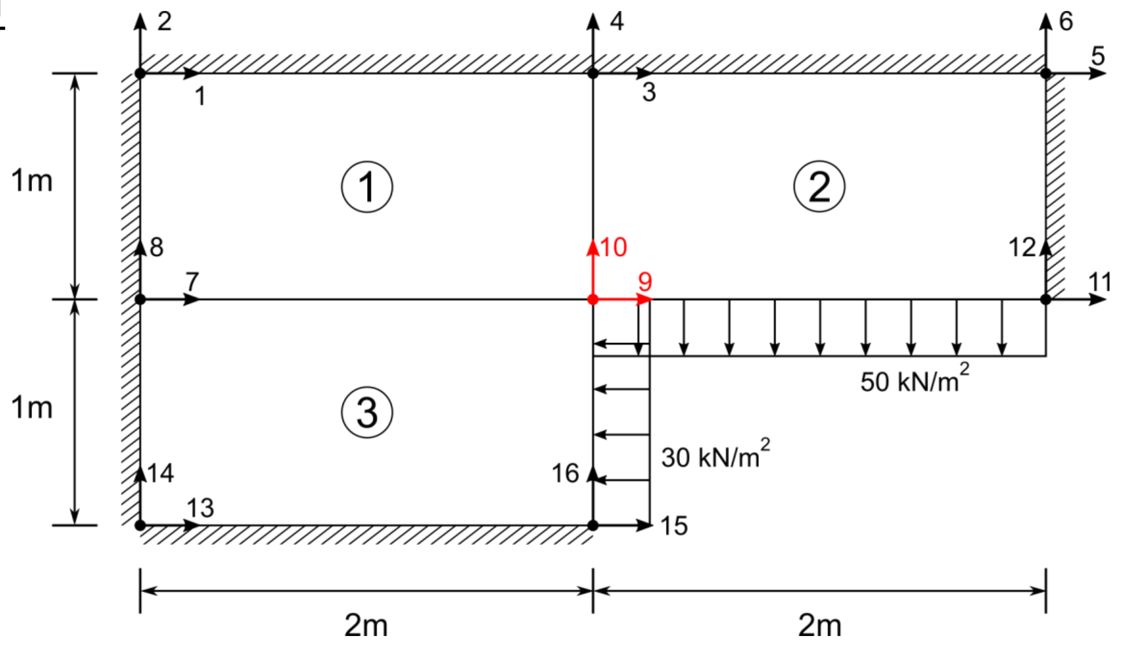
Item a) Deslocamentos nodais

- Precisamos também do vetor de carregamentos
  - R_9 tem contribuições do carregamento horizontal

$$R_9 = R_7^{(1)} + R_5^{(2)} + R_1^{(3)} = 0 + 0 + \frac{-30[kN/m^2] \times 1[m]}{2}$$
$$= -15[kN/m]$$

  - R_{10} tem contribuições do peso próprio e carregamento vertical

$$R_{10} = R_8^{(1)} + R_9^{(2)} + R_2^{(3)}$$
$$= \frac{-\gamma \times 1 \times 2}{4} + \left(\frac{-\gamma \times 1 \times 2}{4} + \frac{-50 \times 2}{2}\right) + \frac{-\gamma \times 1 \times 2}{4}$$
$$= -95\frac{kN}{m}$$



Portanto podemos montar o sistema linear

$$\begin{bmatrix} K_{9,9} & K_{9,10} \\ K_{10,9} & K_{10,10} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_9 \\ U_{10} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_9 \\ R_{10} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 26\,373\,627 & 3\,571\,429 \\ 3\,571\,429 & 47\,802\,198 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_9 \\ U_{10} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -15 \\ -95 \end{Bmatrix}$$

e resolve-lo para obter os deslocamentos

$$U_9 = -3{,}02691 \times 10^{-7} [m]$$
$$U_{10} = -1{,}96474 \times 10^{-6} [m]$$

Item b) Deslocamentos no ponto P

O ponto P está dentro do elemento (1).

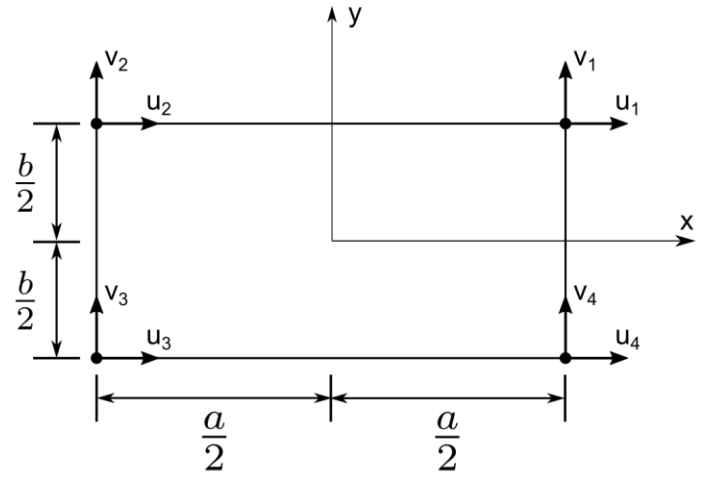
A solução dentro do elemento é obtida pela combinação linear as funções de forma ponderada pelos deslocamentos nos nós.

Como há apenas dois Graus de Liberdade não-nulos, temos

$$u_P = U_9 \times h_4(x_P, y_p)$$
$$v_P = U_{10} \times h_4(x_P, y_p)$$

$$h_4(0{,}5, -0{,}25) = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{2\times 0{,}5}{2}\right)\left(1 - \frac{2\times -0{,}25}{1}\right) = \frac{9}{16}$$

$$u_P = -1{,}70264 \times 10^{-7}$$
$$v_P = -1{,}10517 \times 10^{-6}$$



$$h_1(x,y) = \frac{1}{4}(1 + \frac{2x}{a})(1 + \frac{2y}{b})$$
$$h_2(x,y) = \frac{1}{4}(1 - \frac{2x}{a})(1 + \frac{2y}{b})$$
$$h_3(x,y) = \frac{1}{4}(1 - \frac{2x}{a})(1 - \frac{2y}{b})$$
$$h_4(x,y) = \frac{1}{4}(1 + \frac{2x}{a})(1 - \frac{2y}{b})$$

Item c) Deformações no ponto P

As deformações são obtidas derivando o campo de deslocamentos

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = U_9 \frac{\partial h_4}{\partial x}\left(x_P, y_p\right)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = U_{10} \frac{\partial h_4}{\partial y}\left(x_P, y_p\right)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = U_9 \frac{\partial h_4}{\partial y}\left(x_P, y_p\right) + U_{10} \frac{\partial h_4}{\partial x}\left(x_P, y_p\right)$$

$$\frac{\partial h_4}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{4}(1 + 2y) \rightarrow \frac{\partial h_4}{\partial x}(x_P, y_P) = \frac{3}{8}$$

$$\frac{\partial h_4}{\partial y}(x, y) = -\frac{1}{2}(1 + x) \rightarrow \frac{\partial h_4}{\partial y}(x_P, y_P) = -\frac{3}{4}$$

Portanto

$$\varepsilon_{xx} = \frac{3}{8} U_9 = -1{,}13509 \times 10^{-7}$$

$$\varepsilon_{yy} = -\frac{3}{4} U_{10} = 1{,}47356 \times 10^{-6}$$

$$\gamma_{xy} = -\frac{3}{4} U_9 + \frac{3}{8} U_{10} = -5{,}0976 \times 10^{-7}$$

Item d) Tensões no ponto P

As tensões são obtidas a partir da lei constitutiva

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

Inserindo os valores do item anterior e enunciado, temos

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{2 \times 10^7}{1-0{,}3^2} \begin{bmatrix} 1 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-0{,}3}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1{,}13509 \times 10^{-7} \\ 1{,}47356 \times 10^{-6} \\ -5{,}0976 \times 10^{-7} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7{,}22105 \\ 31{,}63744 \\ -3{,}92123 \end{Bmatrix} \left[\frac{kN}{m^2}\right]$$

Item e) Tensões principais em P e direção de σ_1

Com as componentes encontradas no item anterior, podemos montar o tensor das tensões

$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

As tensões principais são as soluções do auto-problema

$$\det([T] - \lambda[I]) = 0$$
$$\leftrightarrow$$
$$\lambda[(\sigma_{xx} - \lambda)(\sigma_{yy} - \lambda) - \sigma_{xy}^2] = 0$$

Podemos ver que $\lambda_1 = 0$ é uma solução, e as outras duas são obtidas resolvendo uma equação quadrática.

Item e) Tensões principais em P e direção de σ_1

Rearranjando os termos encontramos

$$\lambda^2 - \left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right)\lambda + \left(\sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{xy}^2\right) = 0$$

Aplicando Bhaskara obtemos as outras duas soluções

$$\lambda = \frac{\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right)}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right)^2 - 4\left(\sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{xy}^2\right)}$$

$$\lambda_2 = \frac{\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right)}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta} = 32{,}25172\,\frac{kN}{m^2}$$

$$\lambda_3 = \frac{\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right)}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\Delta} = 6{,}60676\,\frac{kN}{m^2}$$

Reordenando para a convenção de tensões principais temos:

$$\sigma_1 = 32{,}25172\ kN/m^2, \qquad \sigma_2 = 6{,}60676\ kN/m^2, \qquad \sigma_3 = 0\ kN/m^2$$

Item e) Tensões principais em P e direção de σ_1

Para a direção associada com σ_1 precisamos retornar à definição de tensão principal

$$[T]\{n_1\} = \sigma_1\{n_1\}$$

Este sistema é indeterminado, portanto precisamos de mais uma equação

$$\|\{n_1\}\|^2 = 1$$

Deste forma temos

$$\begin{aligned}
&\sigma_{xx}n_{1x} + \sigma_{xy}n_{1y} = \sigma_1 n_{1x}\\
&\sigma_{xy}n_{1y} + \sigma_{yy}n_{1y} = \sigma_1 n_{1y}\\
&n_{1x}^2 + n_{1y}^2 = 1
\end{aligned}$$

Item e) Tensões principais em P e direção de σ_1

Escrevendo uma componente em função da outra na primeira equação temos

$$n_{1x}(\sigma_{xx} - \sigma_1) + \sigma_{xy} n_{1y} = 0$$
$$n_{1x} = -\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_1} n_{1y}$$

Substituindo na terceira

$$\left(\left(\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_1}\right)^2 + 1\right) n_{1y}^2 = 1$$
$$n_{1y} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_1}\right)^2 + 1}} = 0{,}98795$$
$$n_{1x} = -\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_1} n_{1y} = -0{,}15477$$

Item e) Tensões principais em P e direção de σ_1

Portanto encontramos a direção associada com σ_1

$$\{n_1\} = \begin{Bmatrix} 0{,}98795 \\ -0{,}15477 \end{Bmatrix}$$