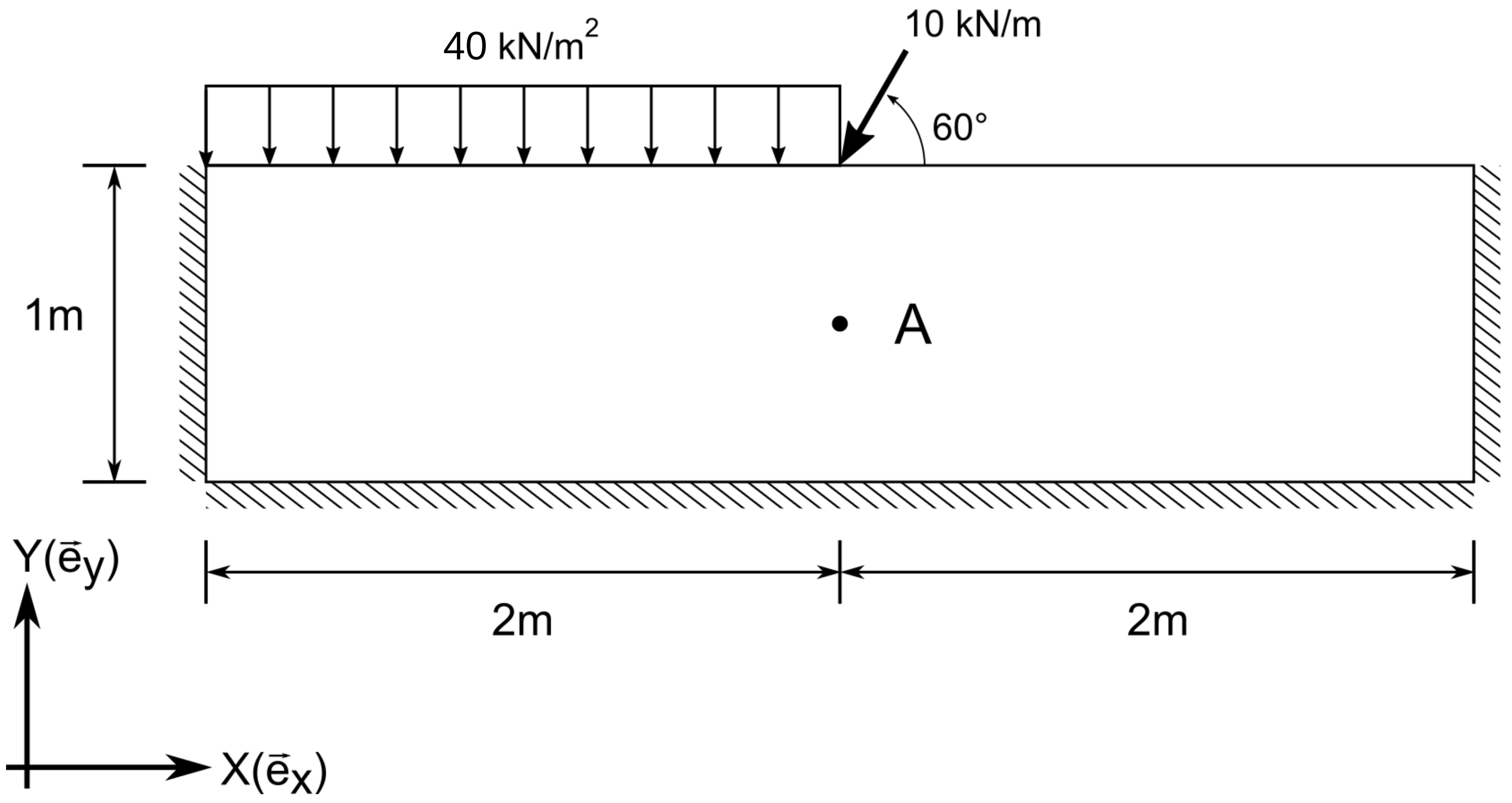
Questão com 2 elementos

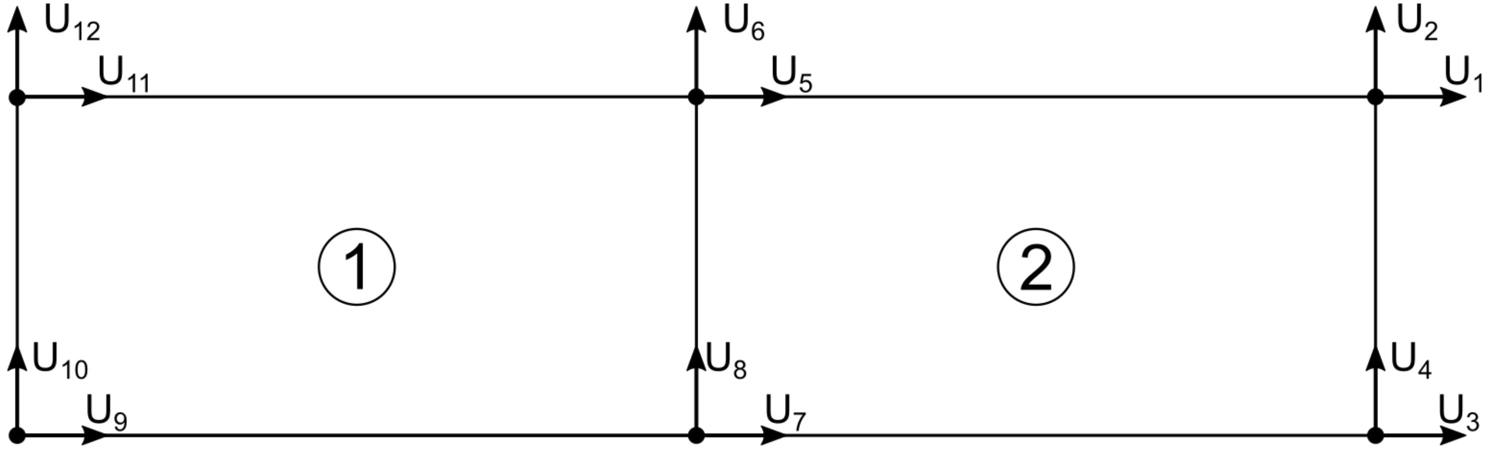
Enunciado

Considere a chapa esquematizada na figura abaixo



Enunciado

Considere ainda a seguinte discretização por elementos finitos



Enunciado

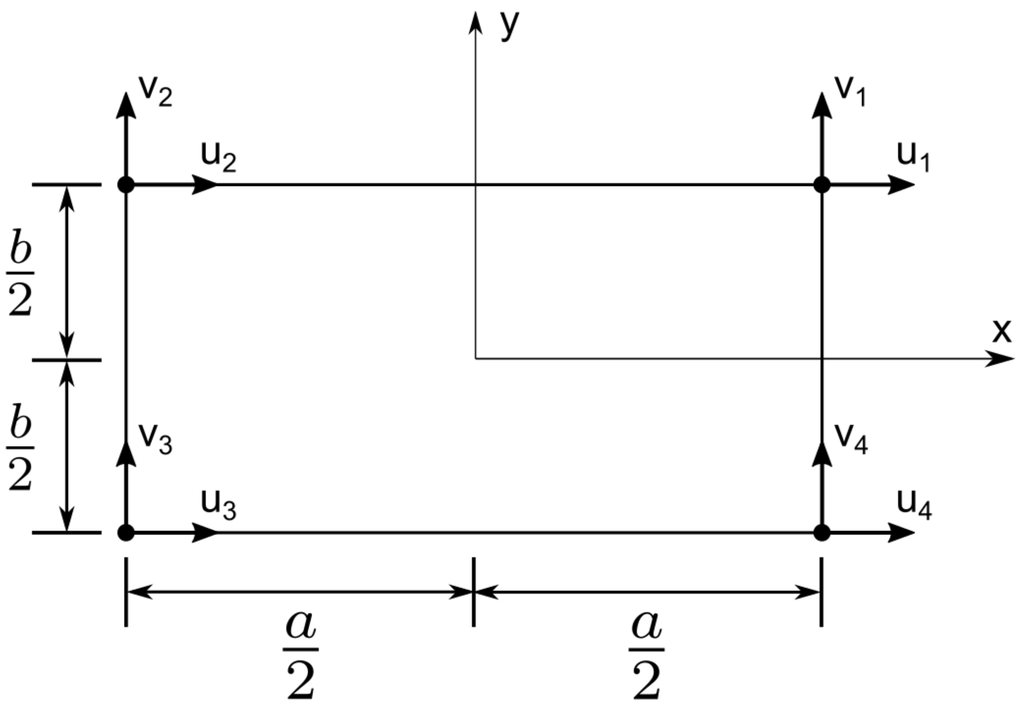
Pede-se determinar:

a) Deslocamentos nodais

b) Deslocamentos e deformações para um ponto genérico do elemento 1

c) Deslocamentos para o ponto A (centro geométrico da chapa), e a tensão σ_{xx} para o ponto A considerando-o como um ponto do elemento 1

Considere o elemento em seu sistema local e suas funções de interpolação



$$h_1(x,y) = \frac{1}{4}(1+\frac{2x}{a})(1+\frac{2y}{b})$$

$$h_2(x,y) = \frac{1}{4}(1-\frac{2x}{a})(1+\frac{2y}{b})$$

$$h_3(x,y) = \frac{1}{4}(1-\frac{2x}{a})(1-\frac{2y}{b})$$

$$h_4(x,y) = \frac{1}{4}(1+\frac{2x}{a})(1-\frac{2y}{b})$$

Dados

A matriz de rigidez do elemento 1 por unidade de espessura da chapa referida ao sistema local:

$$[k] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 8{,}79\times10^6 & 3{,}57\times10^6 & -1{,}10\times10^6 & -2{,}75\times10^5 & -4{,}40\times10^6 & -3{,}57\times10^6 & -3{,}30\times10^6 & 2{,}75\times10^5 \\ 3{,}57\times10^6 & 1{,}59\times10^7 & 2{,}75\times10^5 & 6{,}04\times10^6 & -3{,}57\times10^6 & -7{,}97\times10^6 & -2{,}75\times10^5 & -1{,}40\times10^7 \\ -1{,}10\times10^6 & 2{,}75\times10^5 & 8{,}79\times10^6 & -3{,}57\times10^6 & -3{,}30\times10^6 & -2{,}75\times10^5 & -4{,}40\times10^6 & 3{,}57\times10^6 \\ -2{,}75\times10^5 & 6{,}04\times10^6 & -3{,}57\times10^6 & 1{,}59\times10^7 & 2{,}75\times10^5 & -1{,}40\times10^7 & 3{,}57\times10^6 & -7{,}97\times10^6 \\ -4{,}40\times10^6 & -3{,}57\times10^6 & -3{,}30\times10^6 & 2{,}75\times10^5 & 8{,}79\times10^6 & 3{,}57\times10^6 & -1{,}10\times10^6 & -2{,}75\times10^5 \\ -3{,}57\times10^6 & -7{,}97\times10^6 & -2{,}75\times10^5 & -1{,}40\times10^7 & 3{,}57\times10^6 & 1{,}59\times10^7 & 2{,}75\times10^5 & 6{,}04\times10^6 \\ -3{,}30\times10^6 & -2{,}75\times10^5 & -4{,}40\times10^6 & 3{,}57\times10^6 & -1{,}10\times10^6 & 2{,}75\times10^5 & 8{,}79\times10^6 & -3{,}57\times10^6 \\ 2{,}75\times10^5 & -1{,}40\times10^7 & 3{,}57\times10^6 & -7{,}97\times10^6 & -2{,}75\times10^5 & 6{,}04\times10^6 & -3{,}57\times10^6 & 1{,}59\times10^7 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{array}$$

E as informações adicionais:

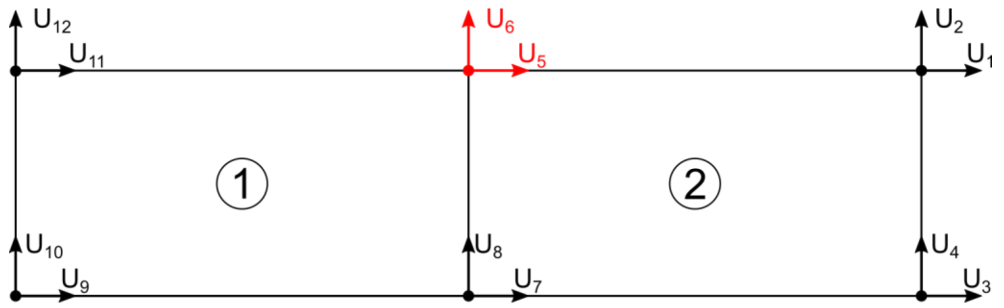
$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$[C] = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$E = 2\times10^7\ kN/m^2$$
$$\nu = 0.3$$

- O método de elementos finitos resulte em um sistema linear de equações nos deslocamentos dos nós livres

$$[K]\{U\} = \{R\}$$

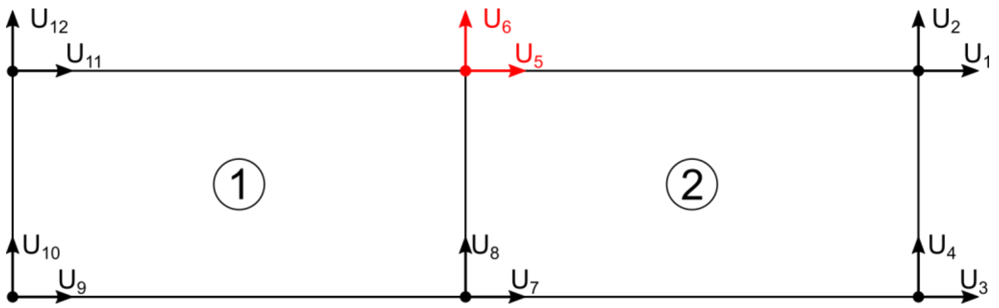


- Os graus de liberdade U_5 e U_6 são os únicos não restritos
- Temos um sistema de ordem 2

$$\begin{bmatrix} K_{5,5} & K_{5,6} \\ K_{5,6} & K_{6,6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_5 \\ R_6 \end{Bmatrix}$$

- Cada elemento contribui para a matriz de rigidez através das correspondências

GL GLOBAL	GL ELEMENTO 1	GL ELEMENTO 2
U_5	u_1 (1)	u_2 (3)
U_6	v_1 (2)	v_2 (4)

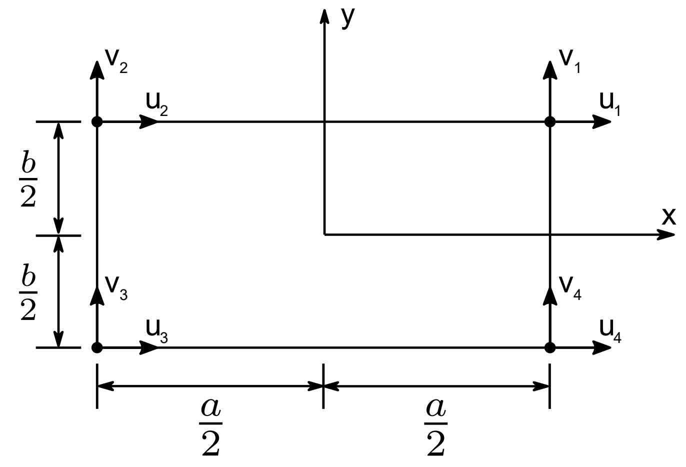


- Somando as componentes correspondentes da matriz de rigidez dada

$$K_{5,5} = k_{1,1}^{(1)} + k_{3,3}^{(2)} = 8{,}79 \times 10^6 + 8{,}79 \times 10^6 = 1{,}76 \times 10^7$$

$$K_{5,6} = k_{1,2}^{(1)} + k_{3,4}^{(2)} = 3{,}57 \times 10^6 - 3{,}57 \times 10^6 = 0$$

$$K_{6,6} = k_{2,2}^{(1)} + k_{4,4}^{(2)} = 1{,}59 \times 10^7 + 1{,}59 \times 10^7 = 3{,}18 \times 10^7$$



Elemento padrão

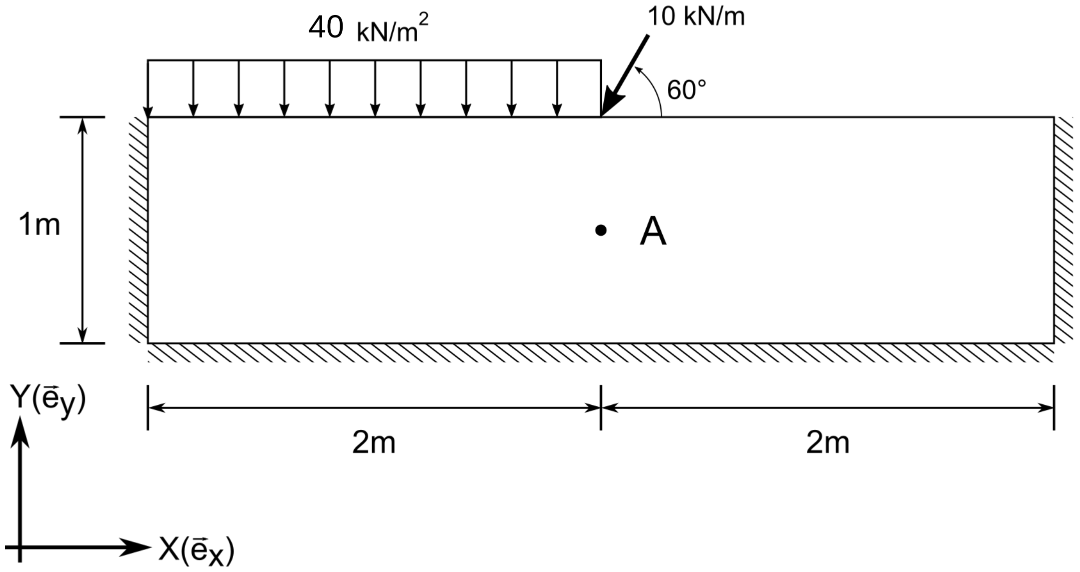
Item a) Deslocamentos nodais – carregamentos

- A componente R_5 é relativa ao deslocamento **horizontal** do nó
- Somente a parte horizontal da carga concentrada contribui

$$R_5 = -10 \times \cos 60^\circ = -5\ [kN/m]$$

- A componente R_6 é relativa ao deslocamento **vertical** do nó
- Contribuem metade da carga distribuída e a parte vertical da carga concentrada

$$R_6 = -\frac{1}{2} \times 40 \times 2 - 10 \times \operatorname{sen} 60^\circ = -48{,}7\ [kN/m]$$



Item a) Deslocamentos nodais

Substituindo os valores, montamos o sistema

$$\begin{bmatrix} K_{5,5} & K_{5,6} \\ K_{5,6} & K_{6,6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_5 \\ R_6 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1{,}76 \times 10^7 & 0 \\ 0 & 3{,}18 \times 10^7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5 \\ -48{,}7 \end{Bmatrix}$$

Como a matriz é diagonal, basta inverter os elementos da diagonal para achar a matriz inversa, com isso

$$\begin{Bmatrix} U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5/1{,}76 \times 10^7 \\ -48{,}7/3{,}18 \times 10^7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2{,}84 \times 10^{-7} \\ -1{,}53 \times 10^{-6} \end{Bmatrix} \ [m]$$

Item b) Deslocamentos e deformações

- Os deslocamentos em um ponto resultam da combinação dos deslocamentos nodais ponderados pelas funções de interpolação

$$u(x, y) = h_1(x, y)u_1 + h_2(x, y)u_2 + h_3(x, y)u_3 + h_4(x, y)u_4$$

$$v(x, y) = h_1(x, y)v_1 + h_2(x, y)v_2 + h_3(x, y)v_3 + h_4(x, y)v_4$$

- No elemento 1, somente $u_1 = U_5$ e $u_2 = U_6$ não se anulam, portanto

$$u(x, y) = h_1(x, y)u_1 = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{2x}{a}\right)\left(1 + \frac{2y}{b}\right)U_5$$

$$\boxed{u(x, y) = -7{,}1 \times 10^{-8}(1 + x)(1 + 2y)}$$

$$v(x, y) = h_1(x, y)v_1 = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{2x}{a}\right)\left(1 + \frac{2y}{b}\right)U_6$$

$$\boxed{v(x, y) = -3{,}8 \times 10^{-7}(1 + x)(1 + 2y)}$$

Item b) Deslocamentos e deformações

- As deformações são obtidas derivando o campo de deslocamentos

$$u = -7{,}1 \times 10^{-8}(1 + x)(1 + 2y)$$
$$v = -3{,}8 \times 10^{-7}(1 + x)(1 + 2y)$$

derivadas

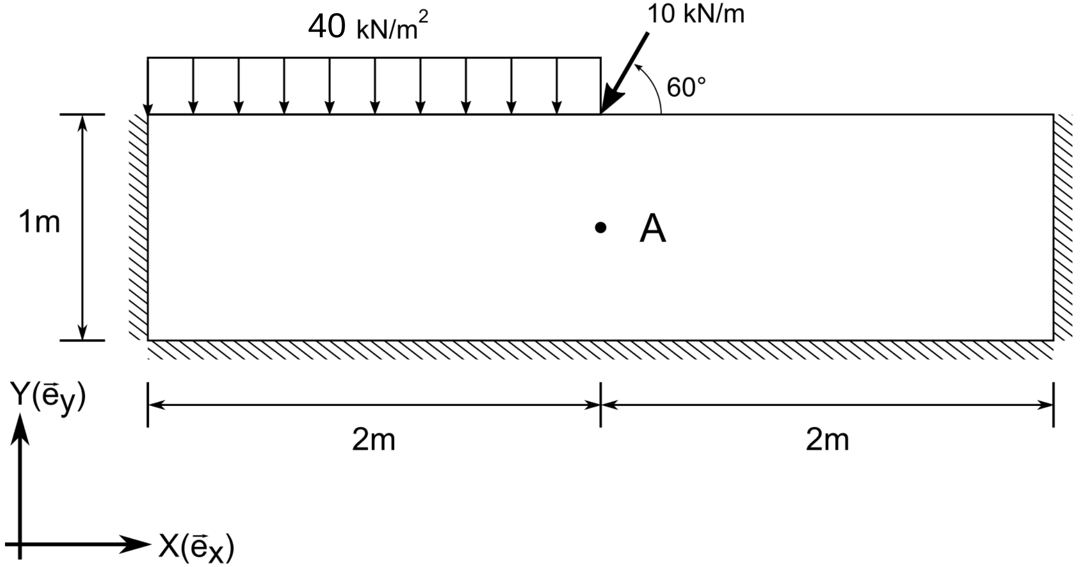
$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = -7{,}1 \times 10^{-8}(1 + 2y)$$

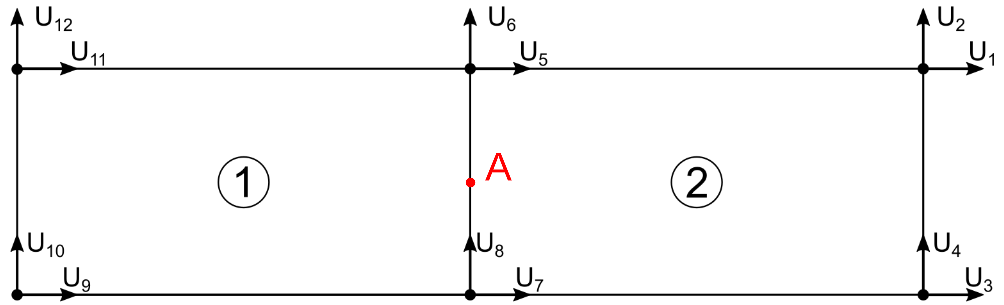
$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = -7{,}6 \times 10^{-7}(1 + x)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -1{,}42 \times 10^{-7}(1 + x) - 3{,}8 \times 10^{-7}(1 + 2y)$$

Item c) Deslocamentos para o ponto A

- O ponto A é o centro geométrico da chapa





- No sistema local do elemento 1, o ponto A tem coordenadas $(x, y) = (a/2, 0) = (1, 0)$

$$u = -7{,}1 \times 10^{-8}(1 + x)(1 + 2y)$$
$$v = -3{,}8 \times 10^{-7}(1 + x)(1 + 2y)$$

$$\longrightarrow$$

$$u_A = -1{,}42 \times 10^{-7}\ [m]$$
$$v_A = -7{,}6 \times 10^{-7}\ [m]$$

Item c) Tensão σ_{xx} para o ponto A

- As três componentes de tensão se relacionam com as deformações por

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

- A componente que queremos é portanto

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}\right)$$

- Precisamos das deformações ε_{xx} e ε_{yy}

Item c) Tensão σ_{xx} para o ponto A

- Para obter as deformações em A basta substituir suas coordenadas de acordo com o elemento 1 (como especificado no enunciado)

$$\varepsilon_{xx} = -7{,}1 \times 10^{-8}(1 + 2y)$$
$$\varepsilon_{yy} = -7{,}6 \times 10^{-7}(1 + x)$$

$$\varepsilon_{xx}(A) = -7{,}1 \times 10^{-8}$$
$$\varepsilon_{yy}(A) = -1{,}52 \times 10^{-6}$$

- E com isso podemos calcular a tensão

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1 - \nu^2}\left(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}\right) = \frac{2 \times 10^7}{1 - 0{,}3^2}\left(-7{,}1 \times 10^{-8} - 0{,}3 \times 1{,}52 \times 10^{-6}\right)$$

$$\sigma_{xx} = -11{,}6\ \left[kN/m^2\right]$$