Considere a estrutura cuja seção transversal está descrita na Figura 1.

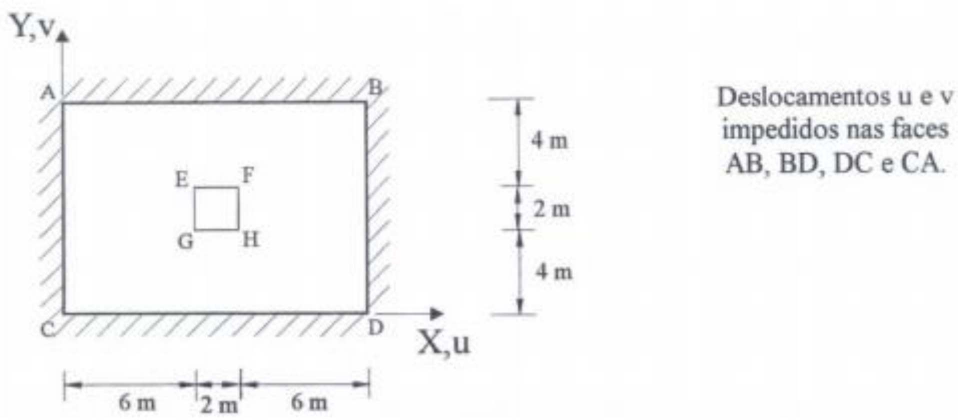



**Figura 1**

A estrutura tem uma região vazada representada em sua seção transversal pelo retângulo $EFGH$. A estrutura é longa na direção ortogonal a sua seção transversal sendo que nas seções de extremidade os deslocamentos na direção ortogonal à seção são impedidos. A região vazada é preenchida por um fluido que exerce uma pressão constante $p = 10000\ kN/m^2$ nas superfícies definidas por $EF$, $EG$, $GH$ e $FH$. Considere $E = 2{,}1 \cdot 10^7\ kN/m^2$ e $\nu = 0{,}3$.

Na Figura 2 mostra-se um modelo de elementos finitos, que tira partido da simetria, correspondente à região hachurada indicada também na Figura 2.

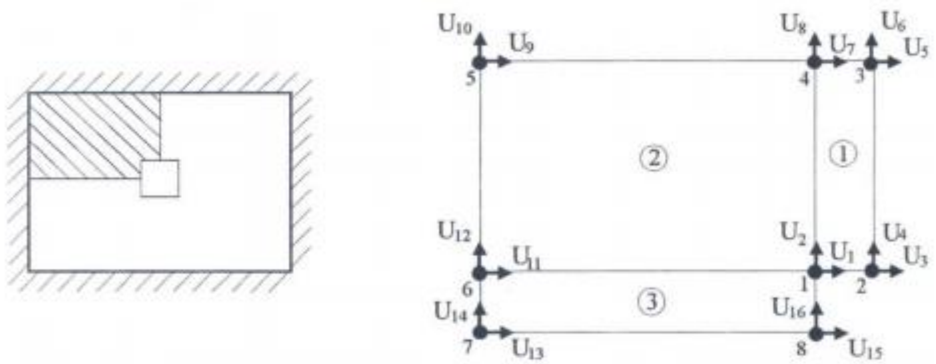



**Figura 2**

Pedem-se:

***i.*** Qual o modelo matemático da elasticidade plana que deve ser utilizado para modelagem deste problema?

***ii.*** Indique quais as vinculações que devem ser introduzidas nos nós para que o modelo de elementos finitos represente a situação descrita;

***iii.*** Calcule os coeficientes $K_{11}$, $K_{22}$, $K_{12}$ da matriz de rigidez do modelo, considerando a expressão exata da matriz de rigidez do elemento retangular (veja **Moodle**);

***iv.*** Calcule o carregamento externo correspondente aos graus de liberdade $U_1$ e $U_2$, isto é $R_1$ e $R_2$;

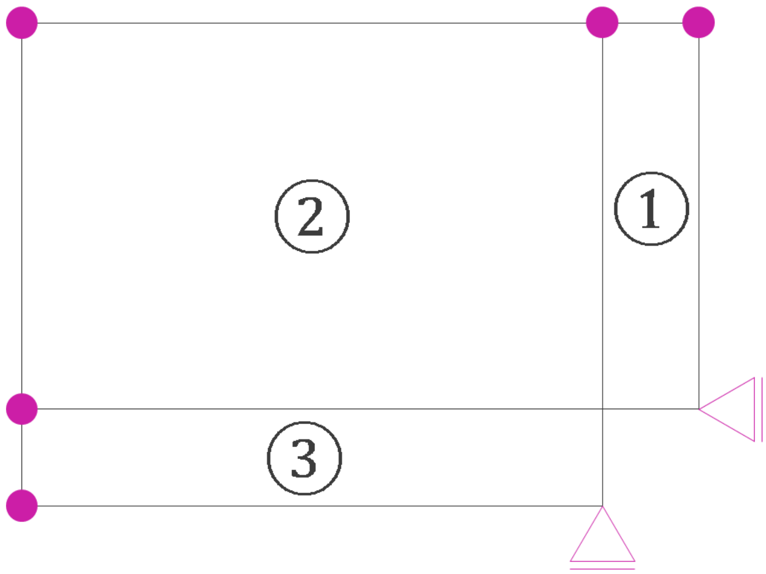
***v.*** Considerando os deslocamentos $U_1 = -2 \cdot 10^{-4}\ m$ e $U_2 = 1{,}3 \cdot 10^{-4}\ m$, calcular as componentes de deformação $\varepsilon_{xx}$, $\varepsilon_{yy}$ e $\gamma_{xy}$ para o ponto de coordenadas $X = 5{,}0\ m$ e $Y = 7{,}5\ m$.

**Resolução**

***i.*** Deve-se usar o Estado Plano de Deformação, pois "a estrutura é longa na direção ortogonal a sua seção transversal sendo que nas seções de extremidade os deslocamentos na direção ortogonal à seção são impedidos. A região vazada é preenchida por um fluido que exerce uma pressão constante".

***ii.*** Devem estar fixos os nós do contorno (3, 4, 5, 6 e 7) devido ao engastamento. O nó 2 deve ter o deslocamento horizontal restringido e o nó 8, o vertical, por razão da simetria. Estão livres, portanto, os graus de liberdade $U_1$, $U_2$, $U_4$ e $U_{15}$.

O desenho abaixo ilustra a vinculação. Bolinhas rosas cheias indicam a fixação dos dois graus de liberdade do nó e os apoios simples indicam restrição do grau de liberdade ortogonal.




***iii.*** A tabela abaixo, chamada de tabela de conectividade, relaciona os graus de liberdade globais $U_1$ e $U_2$ com seus correspondentes locais em cada elemento.

| GL global | ① | ② | ③ |
|---|---|---|---|
| | GL local | | |
| $U_1$ | $u_5$ | $u_7$ | $u_1$ |
| $U_2$ | $u_6$ | $u_8$ | $u_2$ |

Tendo em vista tal correspondência, calculamos:

$$K_{11} = k_{55}^{①} + k_{77}^{②} + k_{11}^{③}$$
$$K_{22} = k_{66}^{①} + k_{88}^{②} + k_{22}^{③}$$
$$K_{12} = k_{56}^{①} + k_{78}^{②} + k_{12}^{③}$$

Como se trata de estado plano de deformação, calculamos as constantes materiais equivalentes

$$E^* = \frac{E}{1-\nu^2} = \frac{2{,}1 \cdot 10^7}{1-0{,}3^2} = 2{,}31 \cdot 10^7 \ \ kN/m^2$$
$$\nu^* = \frac{\nu}{1-\nu} = \frac{0{,}3}{1-0{,}3} = 0{,}43$$

O termo

$$C = \frac{E^*}{12[1-(\nu^*)^2]} = \frac{2{,}31 \cdot 10^7}{12(1-0{,}43^2)} = 2{,}36 \cdot 10^6 \ \ kN/m^2$$

é uma constante recorrente na matriz de rigidez, então já o deixamos calculado de antemão.

Vamos agora calcular cada um dos termos necessários. A partir da matriz de rigidez do elemento de 4 nós, disponível no **Moodle**.

Elemento ①:

$$a = 1\ m$$
$$b = 4\ m$$

$$k_{55}^{①} = C\left[2(1-\nu^*)\frac{a}{b} + 4 \cdot \frac{b}{a}\right] = 2{,}36 \cdot 10^6 \left[2(1-0{,}43)\frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{4}{1}\right]$$
$$= 3{,}84 \cdot 10^7 \ \ kN/m^2$$
$$k_{66}^{①} = C\left[2(1-\nu^*)\frac{b}{a} + 4 \cdot \frac{a}{b}\right] = 2{,}36 \cdot 10^6 \left[2(1-0{,}43)\frac{4}{1} + 4 \cdot \frac{1}{4}\right]$$
$$= 1{,}31 \cdot 10^7 \ \ kN/m^2$$
$$k_{56}^{①} = C\left[\frac{3}{2}(1+\nu^*)\right] = 2{,}36 \cdot 10^6 \left[\frac{3}{2}(1+0{,}43)\right] = 5{,}06 \cdot 10^6 \ \ kN/m^2$$

Elemento ②:

$$a = 6\ m$$
$$b = 4\ m$$

$$k_{77}^{②} = C\left[2(1-\nu^*)\frac{a}{b} + 4 \cdot \frac{b}{a}\right] = 2{,}36 \cdot 10^6 \left[2(1-0{,}43)\frac{6}{4} + 4 \cdot \frac{4}{6}\right]$$
$$= 1{,}03 \cdot 10^7 \ \ kN/m^2$$
$$k_{88}^{②} = C\left[2(1-\nu^*)\frac{b}{a} + 4 \cdot \frac{a}{b}\right] = 2{,}36 \cdot 10^6 \left[2(1-0{,}43)\frac{4}{6} + 4 \cdot \frac{6}{4}\right]$$
$$= 1{,}59 \cdot 10^7 \ \ kN/m^2$$
$$k_{78}^{②} = C\left[-\frac{3}{2}(1+\nu^*)\right] = -5{,}06 \cdot 10^6 \ \ kN/m^2$$

Elemento ③:

$$a = 6\ m$$
$$b = 1\ m$$

$$k_{11}^{③} = C\left[2(1-\nu^*)\frac{a}{b} + 4\cdot\frac{b}{a}\right] = 2{,}36\cdot 10^6\left[2(1-0{,}43)\frac{6}{1} + 4\cdot\frac{1}{6}\right]$$
$$= 1{,}77\cdot 10^7\ kN/m^2$$
$$k_{22}^{③} = C\left[2(1-\nu^*)\frac{b}{a} + 4\cdot\frac{a}{b}\right] = 2{,}36\cdot 10^6\left[2(1-0{,}43)\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{6}{1}\right]$$
$$= 5{,}71\cdot 10^7\ kN/m^2$$
$$k_{12}^{③} = C\left[\frac{3}{2}(1+\nu^*)\right] = 5{,}06\cdot 10^6\ kN/m^2$$

Substituindo os valores numéricos, temos:

$$K_{11} = k_{55}^{①} + k_{77}^{②} + k_{11}^{③} = 3{,}84\cdot 10^7 + 1{,}03\cdot 10^7 + 1{,}77\cdot 10^7$$

$$K_{11} = 6{,}64\cdot 10^7\ kN/m^2$$

$$K_{22} = k_{66}^{①} + k_{88}^{②} + k_{22}^{③} = 1{,}31\cdot 10^7 + 1{,}59\cdot 10^7 + 5{,}71\cdot 10^7$$

$$K_{22} = 8{,}61\cdot 10^7\ kN/m^2$$

$$K_{12} = k_{56}^{①} + k_{78}^{②} + k_{12}^{③} = 5{,}06\cdot 10^6 - 5{,}06\cdot 10^6 + 5{,}06\cdot 10^6$$

$$K_{12} = 5{,}06\cdot 10^6\ kN/m^2$$

***iv.*** A resultante de uma carga uniforme, no elemento de 4 nós, é igualmente dividida para os dois nós da borda em que a carga atua.

O elemento ③ recebe a pressão $p = 10000\ kN/m^2$ em sua borda direita de dimensão $1\ m$.

A resultante dessa pressão é $10000\ kN/m$ horizontal para esquerda, metade dela vai para o grau de liberdade $U_1$ no sentido oposto, portanto:

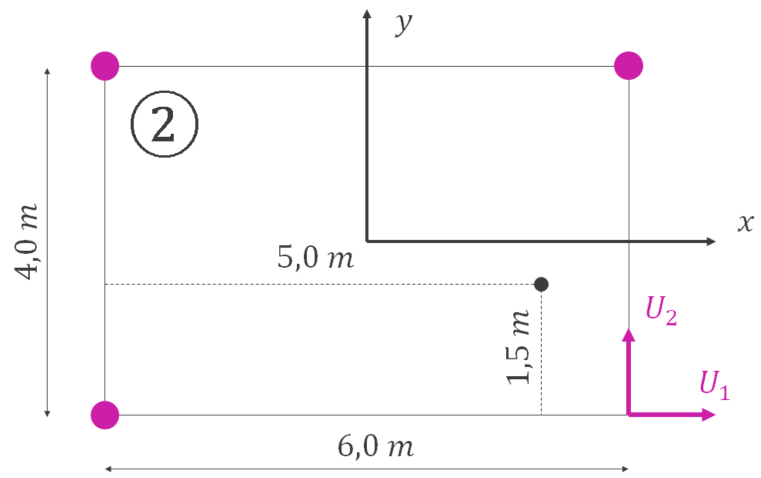
$$R_1 = -5000\ kN/m$$

O elemento ① recebe a pressão $p = 10000\ kN/m^2$ em sua borda inferior de dimensão $1\ m$.

A resultante dessa pressão é $10000\ kN/m$ vertical para cima, metade dela vai para o grau de liberdade $U_2$, portanto:

$$R_2 = 5000\ kN/m$$

***v.*** O ponto dado $X = 5{,}0\ m$ e $Y = 7{,}5\ m$ pertence ao elemento ② como ilustrado na figura seguinte.




O ponto tem coordenadas locais

$$x = 2{,}0\ m$$
$$y = -0{,}5\ m$$

A matriz das funções de forma é

$$[H] = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & h_4 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & h_4 \end{bmatrix}$$

e a matriz das deformações é

$$[B] = [\partial_\varepsilon][H] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & h_4 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & h_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial h_2}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial h_3}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial h_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial h_1}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial h_2}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial h_3}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial h_4}{\partial y} \\ \dfrac{\partial h_1}{\partial y} & \dfrac{\partial h_1}{\partial x} & \dfrac{\partial h_2}{\partial y} & \dfrac{\partial h_2}{\partial x} & \dfrac{\partial h_3}{\partial y} & \dfrac{\partial h_3}{\partial x} & \dfrac{\partial h_4}{\partial y} & \dfrac{\partial h_4}{\partial x} \end{bmatrix}$$

As deformações no interior do elemento são dadas pela aplicação da matriz $[B]$ aos deslocamentos nodais

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial y} \\ \frac{\partial h_1}{\partial y} & \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} & \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_3}{\partial y} & \frac{\partial h_3}{\partial x} & \frac{\partial h_4}{\partial y} & \frac{\partial h_4}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1\\ u_2\\ u_3\\ u_4\\ u_5\\ u_6\\ u_7\\ u_8 \end{Bmatrix}$$

Devido à vinculação

$$u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_5 = u_6 = 0$$

Pela correspondência dos graus de liberdade locais e globais

$$u_7 = U_1$$
$$u_8 = U_2$$

Portanto:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial y} \\ \frac{\partial h_1}{\partial y} & \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} & \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_3}{\partial y} & \frac{\partial h_3}{\partial x} & \frac{\partial h_4}{\partial y} & \frac{\partial h_4}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ U_1\\ U_2 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} U_1 \frac{\partial h_4}{\partial x} \\ U_2 \frac{\partial h_4}{\partial y} \\ U_1 \frac{\partial h_4}{\partial y} + U_2 \frac{\partial h_4}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

A única função de forma necessária nesta questão é

$$h_4(x, y) = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{2x}{a}\right)\left(1 - \frac{2y}{b}\right)$$

cujas derivadas são

$$\frac{\partial h_4}{\partial x} = \frac{1}{2a}\left(1 - \frac{2y}{b}\right) = \frac{1}{12}\left(1 - \frac{y}{2}\right)$$

e

$$\frac{\partial h_4}{\partial y} = -\frac{1}{2b}\left(1+\frac{2x}{a}\right) = -\frac{1}{8}\left(1+\frac{x}{3}\right)$$

No ponto dado $x = 2{,}0\ m$ e $y = -0{,}5\ m$, assim:

$$\frac{\partial h_4}{\partial x} = \frac{1}{12}\left(1-\frac{(-0{,}5)}{2}\right) = 0{,}104$$

$$\frac{\partial h_4}{\partial y} = -\frac{1}{8}\left(1+\frac{2{,}0}{3}\right) = -0{,}208$$

Finalmente, substituindo $U_1 = -2\cdot 10^{-4}\ m$ e $U_2 = 1{,}3\cdot 10^{-4}\ m$, temos:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}-2\cdot 10^{-4}\cdot 0{,}104\\ -1{,}3\cdot 10^{-4}\cdot 0{,}208\\ 2\cdot 10^{-4}\cdot 0{,}208 + 1{,}3\cdot 10^{-4}\cdot 0{,}104\end{Bmatrix}$$

Fazendo as contas, obtemos os resultados

$$\varepsilon_{xx} = -2{,}08\cdot 10^{-5}$$

$$\varepsilon_{yy} = -2{,}70\cdot 10^{-5}$$

$$\gamma_{xy} = 5{,}51\cdot 10^{-5}$$